

Category 1

Series 1

Series 2

Series 3

Series 1
Series 2
Series 3

الإحصاءات الترتيبية

Order Statistics

تأليف

الدكتورة/ ثروت محمد عبد المنعم محمد إبراهيم

أستاذ مشارك في الإحصاء الرياضي

قسم الرياضيات - كلية العلوم للبنات بالدمام

المملكة العربية السعودية

الإحصاءات الترتيبية

Order Statistics

تأليف

الدكتورة/ ثروت محمد عبد المنعم محمد إبراهيم

أستاذ مشارك في الإحصاء الرياضي

قسم الرياضيات - كلية العلوم للبنات بالدمام

المملكة العربية السعودية

٢٠٠٩م

ح) دار عبدالله صالح الغامدي، ١٤٣٠هـ

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

إبراهيم ، ثروت محمد عبدالمنعم محمد

الإحصاءات الترتيبية. / ثروت محمد عبدالمنعم محمد إبراهيم. -

الدمام ، ١٤٣٠هـ

... ص ؛ ... سم

ردمك : ٧ - ٠٢ - ٨٠٢٤ - ٦٠٣ - ٩٧٨

١- الإحصاء الرياضي أ- العنوان

١٤٣٠/٧٠٩

ديوي ٥١٩,٥

رقم الإيداع: ١٤٣٠/٧٠٩

ردمك: ٩٧٨-٦٠٣-٨٠٢٤-٠٢-٧

حقوق الطبع محفوظة للناشر
الطبعة الأولى
١٤٣٠هـ - ٢٠٠٩م



مكتبة المتنبي

AL MOTANABI BOOK SHOP

الدمام - شارع المستشفى المركزي هاتف : ٨٤١١٣٩٥ / ٨٤١٣٠٠٠ فاكس : ٨٤٣٢٧٩٤

ص.ب : ٦١٠ الدمام ٣١٤٢١ المملكة العربية السعودية

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

وَقُلْ رَبِّي زُنُنِي عِلْمًا

اهداء

ان الحب قد يشمل فئه من الناس
اما الحنان فيشمل العالم بأكمله.
فإلى عمتى التى كانت مدرسة للحنان
رحمها الله وأسكنها فسيح جناته

فكر وتقدير

بسم الله الرحمن الرحيم
لا تقنطوا من رحمه الله

إن أروع أحساس في الوجود أن نجد أناس نعتبرهم ملائكة في الأرض يقفون بجانبك ويأخذون بيدك وقت المحن - فإليهم جميعاً أدعو لهم بالتوفيق في الحياه وجنة الفردوس في الآخرة وهم اخواني في الله.

منيرة الدوسرى	علاء الدين تيمور
لطيفه يوسف الدوسرى	د. أميرة الضاوي
سبيكه يوسف الدوسرى	حنان السدحان
صلاح يوسف الدوسرى	نوره الحسين
يوسف شاهين الدوسرى	د. ساره السدحان
مها شاهين الدوسرى	خالد السدحان
ايمان عبد الله الدوسرى	عبيد السدحان
نهاد شاهين الدوسرى	ندي السدحان
د. فوزيه البراهيم	ريم جابر
د. منيره عبد الله الهاجرى	د. لطيفه على
د. نوره عبد الله الهاجرى	د. اروى الشيبانى
د. شيخه عبد الكريم	محمد العمر
د. ساره العريفى	عبدالله خالد السدحان
ديما العمر	ريما العمر
عبد الله العمر	حليمه شعبان
د. مها الحامد	الجازى المرى
نجلاء العريفى	نهى الملا
د. نوره الصالح	بندر عبد الله الملا
موزه عبد البارى جمال الليل	د. نوال الفايز
منى عبد الرحمن المجيدل	د. هدى الخرسانى
ليلى الكعبى	د. ريم البلالى
فاطمة شكر الله	د. منيرة الهاجرى

فكر وتقدير

اقدم وافر شكرى إلى طالباتى وبناتى
تمهيدى ماجستير (إحصاء رياضى) لعام
١٤٢٧هـ - وهن كالتالى:

١. ايمان المبيض
٢. مرام الوهيبي
٣. العنود البوعينين
٤. نوال الرشيدى
٥. نوف الشهاب
٦. مها المهاد
٧. امينة النغموش

على ما بذلنه من جهد فى المشاركة فى
الطباعة الاولى للكتاب.

كما أتقدم بشكر خاص لطالبة الدراسات
العليا زينب المرزوق علي ماقامت به من
المراجعنه النهائية للكتاب وتصحيح الاخطاء
فلها مني جزيل الشكر.

تكملة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على اشرف المرسلين محمد وعلى آله وصحبه أجمعين. أما بعد فالحمد لله الذي هدانا وما كنا لنهتدي لولا أن هدانا الله الذي أنعم علي بتأليف هذا الكتاب تلبية لنداء التعريب الذي يتبناه الكثير من العلماء والمتقنين ودعماً للمكتبة العربية لندرة المراجع والكتب في هذا المجال.

الإحصاءات الترتيبية هي عناصر عينة عشوائية مرتبة من الأصغر إلى الأكبر، ولقد زادت أهميتها في السنوات الأخيرة نتيجة لزيادة استخدام الاستدلال الالعلمي. وقد اكتسبت شهرتها نتيجة لاستخدامها في الحصول على أفضل إحصاء بسيط مثل وسيط العينة ومدى العينة إلى جانب أمور أخرى. هذا الكتاب يصلح كمقرر لطلاب الدراسات العليا تخصص إحصاء رياضي في مرحلة الماجستير أو الدكتوراه.

يحتاج الدارس لهذا الكتاب إلى معرفة أساسيات الإحصاء الرياضي والتفاضل والتكامل.

يحتوي هذا الكتاب على سبعة أبواب، يقدم الباب الأول مفاهيم أساسية في الإحصاءات الترتيبية ، أما الباب الثاني فيهتم بتوزيعات دوال الإحصاءات الترتيبية ، ويتطرق الباب الثالث إلى عزوم الإحصاءات الترتيبية ، كما يهتم الباب الرابع بالتوزيع التقريبي للإحصاء الترتيبي ، كما يقدم الباب الخامس تقديرات تعتمد على الإحصاءات الترتيبية. أما الباب السادس فيتطرق إلى التقدير بفترة لمعالم بعض التوزيعات بالاعتماد على الإحصاءات الترتيبية. وأخيراً يتناول الباب السابع الإحصاءات الترتيبية لمتغيرات عشوائية مستقلة وغير متطابقة التوزيع. ومما يجدر الإشارة إليه أن هذا الفصل يقدم مواضيع متقدمة في الإحصاءات الترتيبية تناولتها قليل من المراجع الاجنبية باختصار شديد. ولذلك حاولت أن أتناول هذا الموضوع بأسلوب سهل ومشوق يشجع كثير من الباحثين في الإحصاء الرياضي لاقتحام هذا المجال. هذا ويعتبر هذا

الكتاب المرجع العربى الاول على مستوى العالم العربى وأسأل الله أن
اكون قد وفقت فى هذا المجهود المتواضع خدمة لقضايا البحث العلمى فى
وطننا العربى.

واني أرحب بكل نقد بناء يهدف إلى الأفضل وما الكمال إلا لله وحده
والله ولى التوفيق.

د. ثروت محمد عبد المنعم

المحتويات

الصفحة

الباب الأول: مفاهيم أساسية

٢	١-١ مقدمة
٧	٢-١ التوزيعات الهامشية والمشاركة للإحصاءات الترتيبية
٢٤	٣-١ أمثلة وتطبيقات على الإحصاءات الترتيبية
٣٢	٤-١ دالة التوزيع التجميعي للإحصاءات الترتيبية
٤١	٥-١ المئينات للإحصاءات الترتيبية
٥٩	٦-١ دالة التوزيع المشتركة لإحصاءين ترتيبيين
٦٠	٧-١ العلاقات التكرارية
٦٣	٨-١ التوزيعات للإحصاءات الترتيبية في العينات الموضوعة في توزيعات تكرارية
٦٦	٩-١ أمثلة

الباب الثاني: توزيعات دوال في الإحصاءات الترتيبية

٨٤	١-٢ توزيع المدى
٩٨	٢-٢ توزيع منتصف المدى
١٠٢	٣-٢ توزيع المدى القياسي
١٠٥	٤-٢ توزيع الوسيط
١٠٩	٥-٢ توزيع الفرق بين إحصاءين متتاليين
١١٢	٦-٢ توزيع النسبة بين إحصاءين متتاليين
١١٤	٧-٢ توزيع المدى المثني
١١٧	٨-٢ المشمولات
١٢٢	٩-٢ دالة التوزيع التجميعي للعينه

الباب الثالث: عزوم الإحصاءات الترتيبية

١٢٥	١-٣ العزوم المضبوطة للإحصاءات الترتيبية
١٣٢	٢-٣ بعض العلاقات التكرارية للعزوم
١٣٣	٣-٣ القيم المتوقعة للفرق بين إحصاءين متتاليين
١٣٨	٤-٣ العزم من الرتبة k للفرق بين إحصاءين متتاليين

١٣٩	٥-٣	حساب $E(Y_{r+1}^2) - E(Y_r^2)$, $E(Y_{r+1}^2 - Y_r^2)$
١٤٢	٦-٣	عزوم الاحصاءين W , W
١٤٧	٧-٣	علاقة عامه لعزوم الاحصاءات الترتيبية
١٤٩	٨-٣	القيمة المتوقعة للاحصاء الترتيبي من الرتبة r في عينه من الحجم m حيث $n \geq m$
١٥٠	٩-٣	العلاقة التكرارية بين القيم المتوقعة لبعض الدوال في الاحصاءات الترتيبية
١٥٠	١٠-٣	التحقق من المتوسطات لاصغر الاحصاءات الترتيبية في عينات من الحجم n مختارة من توزيع متماثل
١٥٢	١١-٣	العزوم التقريبية للاحصاءات الترتيبية للعينات الكبيرة

الباب الرابع: التوزيع التقريبي للإحصاء الترتيبي

١٥٨	١-٤	التوزيع التقريبي للإحصاء الترتيبي في حالة المجتمع المنتظم
١٦٣	٢-٤	التوزيع التقريبي لوسيط العينة في حالة المجتمع المنتظم
١٦٥	٣-٤	التوزيع التقريبي للاحصاء الترتيبي من الرتبة r لاي توزيع احتمالي

الباب الخامس: تقديرات تعتمد على الإحصاءات الترتيبية

١٧٠	١-٥	مقدمة
١٧٠	٢-٥	التوزيع المستطيل
١٨١	٣-٥	التوزيع المثلث
١٨٧	٤-٥	توزيع لابلاس
١٩٠	٥-٥	توزيع كوشي

الباب السادس: تقدير الفترة لمعالم بعض التوزيعات بالاعتماد على الإحصاءات الترتيبية.

١٩٤	١-٦	مقدمة
١٩٧	٢-٦	فترات ثقة لمعالم بعض التوزيعات بالاعتماد على الاحصاءات الترتيبية

الباب السابع: الإحصاءات الترتيبية لمتغيرات عشوائية مستقلة وغير متطابقة التوزيع

٢٠٦	١-٧	مفاهيم أساسية
٢٣٠	٢-٧	عزوم الإحصاءات الترتيبية لمتغيرات عشوائية غير متماثلة التوزيع

الباب الأول

مفاهيم أساسية

(١-١) مقدمة:

يتناول هذا الباب أهم التعاريف والمفاهيم الأساسية في الإحصاءات الترتيبية. التي سيحتاجها القارئ عند دراسة هذا الكتاب الإحصاءات الترتيبية هي عناصر عينة عشوائية مرتبة من الأصغر إلى الأكبر. وفي أغلب مناقشتنا للإحصاءات الترتيبية سوف نعتبر العينة العشوائية تتبع توزيعات متصلة.

مثال (١-١-١):

إذا كانت $x_1 = .62$, $x_2 = .98$, $x_3 = .31$, $x_4 = .81$, $x_5 = .53$ قيم مشاهدة من خمس محاولات مستقلة لتجربة ما فإن قيم الإحصاءات الترتيبية هي:
 $y_1 = .31 < y_2 = .53 < y_3 = .62 < y_4 = .81 < y_5 = .98$,
 والقيمة الوسطى بعد ترتيب العناصر هي 62. وتسمى وسيط العينة بينما الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة هو $y_5 - y_1 = .98 - .31 = .67$ ، يسمى مدى العينة.

تعريف (١-١-١):

إذا كانت X_1, X_2, \dots, X_n عناصر عينة عشوائية من الحجم n مختارة من توزيع احتمالي متصل وله دالة كثافة احتمالية $f(x)$ فإن المتغيرات العشوائية:

$$Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n ,$$

تسمى الإحصاءات الترتيبية لتلك العينة حيث:

$$Y_1 = \text{Smallest of } X_1, X_2, \dots, X_n ,$$

$$Y_2 = \text{Second of } X_1, X_2, \dots, X_n ,$$

⋮

$$Y_n = \text{Largest of } X_1, X_2, \dots, X_n ,$$

عموماً Y_r ($r = 1, 2, \dots, n$) يسمى الإحصاء الترتيبي من الرتبة r للعينة العشوائية X_1, X_2, \dots, X_n .

نظرية (١-١-١):

دالة كثافة الاحتمال المشتركة للإحصاءات الترتيبية $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n$ تعطى كالتالي:

$$g(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{cases} n! f(y_1) f(y_2) \dots f(y_n) & , \quad a < y_1 < y_2 < \dots < y_n < b, \\ 0 & , \quad (\text{elsewhere}) \text{ e.w.} \end{cases}$$

حيث $b \rightarrow \infty, a \rightarrow -\infty$.

البرهان:

سنبرهن النظرية في الحالة الخاصة عندما $n=3$ ولكنها ستكون صحيحة لأي n ولتكن X_1, X_2, X_3 متغيرات عشوائية مستقلة ومتطابقة (i, i, d) ولها دالة كثافة احتمال $f(x)$ وعلى ذلك فإن دالة كثافة الاحتمال المشتركة لها هي:

$$g(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} f(x_1)f(x_2)f(x_3) & , \quad a < x_1, x_2, x_3 < b, \\ 0 & , \quad \text{e.w.}, \end{cases}$$

وبالتالي فإن احتمال الحادثة $a < X_1 = X_2 < b, a < X_3 < b$ يعطى من التكامل التالي:

$$P(a < X_1 = X_2 < b, a < X_3 < b) = \int_a^b \int_a^{x_2} \int_a^{x_2} f(x_1)f(x_2)f(x_3)dx_1dx_2dx_3 = 0,$$

حيث:

$$\int_{x_2}^{x_2} f(x_1)dx_1 = 0.$$

وبنفس الطريقة سنجد أن احتمال تساوي أي متغيرين يساوي الصفر، وبالتالي يمكن كتابة فضاء

العينة R كاتحاد للفتات المانعة والشاملة الستة التالية:

$$A_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \ ; \ a < x_1 < x_2 < x_3 < b\},$$

$$A_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \ ; \ a < x_2 < x_1 < x_3 < b\},$$

$$A_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \ ; \ a < x_1 < x_3 < x_2 < b\},$$

$$A_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \ ; \ a < x_2 < x_3 < x_1 < b\},$$

$$A_5 = \{(x_1, x_2, x_3) \ ; \ a < x_3 < x_1 < x_2 < b\},$$

$$A_6 = \{(x_1, x_2, x_3) \ ; \ a < x_3 < x_2 < x_1 < b\}.$$

نجد أنها $3! = 6$ فتات وهو مساوي لعدد طرق ترتيب X_1, X_2, X_3 من الأصغر إلى الأكبر،

ولو أخذنا التحويلة الأحادية:

$$Y_1 = \text{Minimum}(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

$$Y_2 = \text{Middle}(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

$$Y_3 = \text{Maximum}(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

والتي تأخذ الحوادث A_1, A_2, \dots, A_6 إلى الفضاء $R' = \{(y_1, y_2, y_3), a < y_1 < y_2 < y_3 < b\}$

لأن:

$$A_1 : y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3,$$

$$A_2 : y_1 = x_2, \quad y_2 = x_1, \quad y_3 = x_3,$$

$$A_3 : y_1 = x_1, \quad y_2 = x_3, \quad y_3 = x_2,$$

$$A_4 : y_1 = x_2, \quad y_2 = x_3, \quad y_3 = x_1,$$

$$A_5 : y_1 = x_3, \quad y_2 = x_1, \quad y_3 = x_2,$$

$$A_6 : y_1 = x_3, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_1.$$

والتحويل العكسي لهذه الدوال هي:

$$A_1 : x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = y_3,$$

$$A_2 : x_2 = y_1, \quad x_1 = y_2, \quad x_3 = y_3,$$

$$A_3 : x_1 = y_1, \quad x_3 = y_2, \quad x_2 = y_3,$$

$$A_4 : x_2 = y_1, \quad x_3 = y_2, \quad x_1 = y_3,$$

$$A_5 : x_3 = y_1, \quad x_1 = y_2, \quad x_2 = y_3,$$

$$A_6 : x_3 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad x_1 = y_3.$$

ومنها يمكن حساب الجاكوبيان:

$$J_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = J_3 = J_4 = J_5 = J_6 = 1.$$

وعلى ذلك دالة كثافة الاحتمال المشتركة للإحصاءات الترتيبية الثلاثة هي:

$$\begin{aligned} g(y_1, y_2, y_3) &= |J_1| f(y_1) f(y_2) f(y_3) \\ &+ |J_2| f(y_1) f(y_2) f(y_3) + \dots \\ &+ |J_6| f(y_1) f(y_2) f(y_3). \end{aligned}$$

$$\therefore g(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} 3! f(y_1) f(y_2) f(y_3) & , \quad a < y_1 < y_2 < y_3 < b \\ 0 & , \quad \text{e.w.} \end{cases}$$

والمعادلة السابقة تدل على أن الإحصاءات الترتيبية لعناصر العينة العشوائية غير مستقلة إحصائياً.

مثال (١-١-٢):

في حالة التوزيع المنتظم القياسي والذي له دالة كثافة الاحتمال:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < x < 1, \\ 0 & , \quad \text{e.w.} \end{cases}$$

دالة كثافة الاحتمال المشتركة للإحصاءات الترتيبية $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n$ تعطى كالتالي:

$$g(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{cases} n! & , \quad 0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n < 1, \\ 0 & , \quad \text{e.w.} \end{cases}$$

وفي حالة التوزيع الاسي القياسي والذي له دالة كثافة الاحتمال:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad 0 < x, \\ 0 & , \quad \text{e.w.} \end{cases}$$

دالة كثافة الاحتمال المشتركة للإحصاءات الترتيبية $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n$ تعطى كالتالي:

$$g(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{cases} n! e^{-\sum_{i=1}^n y_i} & , \quad 0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n < \infty, \\ 0 & , \quad \text{e.w.} \end{cases}$$

مثال (١-١-٣):

ليكن X متغير عشوائي متصل له دالة كثافة احتمال $f(x)$ متصلة وموجبة في الفترة $a < x < b$ وصفر (e.w). و $F(x)$ دالة التوزيع التجميعي وتكتب كالتالي:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_a^x f(w)dw & , \quad a < x < b, \\ &= 0 & , \quad x \leq a, \\ &= 1 & , \quad x \geq b. \end{aligned}$$

وحيث أن $F'(x) = f(x)$ ، فإنه لكل $a < x < b$ تكون:

$$\begin{aligned} 1 - F(x) &= F(b) - F(x) \\ &= \int_a^b f(w)dw - \int_a^x f(w)dw \\ &= \int_x^b f(w)dw. \end{aligned}$$

مثال (١-١-٤):

ليكن X متغير عشوائي متصل له دالة كثافة احتمال $f(x)$ متصلة وموجبة في الفترة $a < x < b$ وصفر (e.w). و $F(x)$ دالة التوزيع التجميعي وتكتب كالتالي:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_a^x f(w)dw & a < x < b, \\ &= 0 & x \leq a, \\ &= 1 & x \geq b. \end{aligned}$$

وهناك وسيط وحيد للتوزيع يحقق المعادلة $F(u) = \frac{1}{2}$. ولتكن X_1, X_2, X_3 عينة عشوائية من هذا التوزيع الاحتمالي حيث $Y_1 < Y_2 < Y_3$ الإحصاءات الترتيبية للعينة. والمطلوب حساب احتمال إن $Y_2 \leq u$. دالة كثافة الاحتمال المشتركة للإحصاءات الترتيبية الثلاثة هي:

$$g(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} 6 f(y_1) f(y_2) f(y_3) & , \quad a < y_1 < y_2 < y_3 < b, \\ 0 & , \quad \text{e.w.} \end{cases}$$

ومنه يمكن حساب دالة الكثافة الاحتمالية لـ Y_2 كالتالي:

$$\begin{aligned} g_2(y_2) &= \int_{y_2}^b \int_a^{y_2} g(y_1, y_2, y_3) dy_1 dy_3 \\ &= \int_{y_2}^b \int_a^{y_2} 6 f(y_1) f(y_2) f(y_3) dy_1 dy_3 \\ &= 6 f(y_2) \int_{y_2}^b f(y_3) \left[\int_a^{y_2} f(y_1) dy_1 \right] dy_3 \\ &= 6 f(y_2) F(y_2) \int_{y_2}^b f(y_3) dy_3. \\ \therefore g_2(y_2) &= \begin{cases} 6 f(y_2) F(y_2) [1 - F(y_2)] & , \quad a < y_2 < b, \\ 0 & , \quad \text{e.w.} \end{cases} \end{aligned}$$

وبالتالي فإن:

$$\begin{aligned} P(Y_2 \leq u) &= \int_a^u 6 f(y_2) F(y_2) [1 - F(y_2)] dy_2 \\ &= 6 \int_a^u \left[f(y_2) F(y_2) - f(y_2) [F(y_2)]^2 \right] dy_2 \\ &= 6 \left[\frac{[F(y_2)]^2}{2} - \frac{[F(y_2)]^3}{3} \right]_a^u \\ &= 6 \left[\frac{[F(u)]^2}{2} - \frac{[F(u)]^3}{3} \right] - 6 \left[\frac{[F(a)]^2}{2} - \frac{[F(a)]^3}{3} \right]. \end{aligned}$$

وحيث أن $F(a) = 0$ فإن:

$$\begin{aligned} P(Y_2 \leq u) &= 6 \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} \right] \\ &= 6 \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{24} \right] = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

الإجراء المستخدم في المثال السابق يمكن استخدامه لاشتقاق صيغة لدالة كثافة الاحتمال الهامشية للإحصاءات الترتيبية.

(٢-١) التوزيعات الهامشية والمشاركة للإحصاءات الترتيبية:

نحتاج التوزيعات الهامشية للإحصاءات الترتيبية لإيجاد توزيع بعض الإحصاءات الأساسية مثل توزيع الوسيط وتوزيع أصغر وأكبر القيم أما التوزيعات المشاركة لأثنين أو أكثر من الإحصاءات الترتيبية فلها أهمية في إيجاد توزيع مدى العينة $W = Y_n - Y_1$ و المدى المتوسط $Z = \frac{1}{2}(Y_1 + Y_n)$ والتي تستخدم في الكثير من التطبيقات.

نظرية (١-٢-١): (توزيع أكبر القيم)

إذا كانت X_1, X_2, \dots, X_n عناصر عينة عشوائية من الحجم n مسحوبة من توزيع احتمالي متصل وله دالة كثافة احتمالية $f(x)$ وكانت المتغيرات العشوائية $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n$ تمثل الإحصاءات الترتيبية لتلك العينة. عندها فإن Y_n الإحصاء الأكبر وله دالة كثافة الاحتمال الهامشية:

$$g_n(y_n) = \begin{cases} n f(y_n) [F(y_n)]^{n-1} & , \quad a < y_n < b, \\ 0 & , \quad \text{e.w.} \end{cases}$$

البرهان:

يمكن إيجاد دالة كثافة الاحتمال الهامشية للإحصاء Y_n بمكاملة دالة الكثافة المشتركة $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$ على المتغيرات y_1, y_2, \dots, y_{n-1} كالتالي:

$$\begin{aligned} g_n(y_n) &= \int_a^{y_n} \cdots \int_a^{y_4} \int_a^{y_3} \int_a^{y_2} g(y_1, y_2, \dots, y_n) dy_1 dy_2 dy_3 \cdots dy_{n-1} \\ &= n! f(y_n) \int_a^{y_n} \cdots \int_a^{y_4} \int_a^{y_3} \int_a^{y_2} f(y_1) f(y_2) \cdots f(y_{n-1}) dy_1 dy_2 dy_3 \cdots dy_{n-1} \\ &= n! f(y_n) \int_a^{y_n} f(y_{n-1}) \cdots \int_a^{y_4} f(y_3) \int_a^{y_3} f(y_2) \left[\int_a^{y_2} f(y_1) dy_1 \right] dy_2 dy_3 \cdots dy_{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= n! f(y_n) \int_a^{y_n} f(y_{n-1}) \cdots \int_a^{y_4} f(y_3) \left[\int_a^{y_3} f(y_2) F(y_2) dy_2 \right] dy_3 \cdots dy_{n-1} \\
 &= n! f(y_n) \int_a^{y_n} f(y_{n-1}) \cdots \left[\int_a^{y_4} f(y_3) \frac{[F(y_3)]^2}{2} dy_3 \right] \cdots dy_{n-1} \\
 &= n! f(y_n) \int_a^{y_n} f(y_{n-1}) \cdots \left[\int_a^{y_5} f(y_4) \frac{[F(y_4)]^3}{2 \cdot 3} dy_4 \right] \cdots dy_{n-1} \\
 &\vdots \\
 &= n! f(y_n) \frac{[F(y_n)]^{n-1}}{(n-1)!} \\
 \therefore g_n(y_n) &= \begin{cases} n f(y_n) [F(y_n)]^{n-1} & , \quad a < y_n < b, \\ 0 & , \quad \text{e.w.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

نظرية (٢-٢-١): (توزيع أصغر القيم)

إذا كانت X_1, X_2, \dots, X_n عناصر عينة عشوائية من الحجم n مسحوبة من توزيع احتمالي متصل وله دالة كثافة احتمالية $f(x)$ وكانت المتغيرات العشوائية $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n$ الإحصاءات الترتيبية لتلك العينة. عندها فإن Y_1 الإحصاء الأصغر وله دالة كثافة الاحتمال الهامشية:

$$g_1(y_1) = \begin{cases} n f(y_1) [1 - F(y_1)]^{n-1} & , \quad a < y_1 < b, \\ 0 & , \quad \text{e.w.} \end{cases}$$

البرهان:

$$\begin{aligned}
 g_1(y_1) &= n! f(y_1) \int_{y_1}^b \cdots \int_{y_{n-3}}^b \int_{y_{n-2}}^b \int_{y_{n-1}}^b f(y_2) \cdots f(y_{n-1}) f(y_n) dy_n dy_{n-1} \cdots dy_2 \\
 &= n! f(y_1) \int_{y_1}^b f(y_2) \cdots \int_{y_{n-3}}^b f(y_{n-2}) \int_{y_{n-2}}^b f(y_{n-1}) \left[\int_{y_{n-1}}^b f(y_n) dy_n \right] dy_{n-1} \cdots dy_2 \\
 &= n! f(y_1) \int_{y_1}^b f(y_2) \cdots \int_{y_{n-3}}^b f(y_{n-2}) \left[\int_{y_{n-2}}^b f(y_{n-1}) [1 - F(y_{n-1})] dy_{n-1} \right] dy_{n-2} \cdots dy_2 \\
 &= n! f(y_1) \int_{y_1}^b f(y_2) \cdots \left[\int_{y_{n-3}}^b f(y_{n-2}) \frac{[1 - F(y_{n-2})]^2}{2} dy_{n-2} \right] \cdots dy_2
 \end{aligned}$$

$$= n! f(y_1) \int_{y_1}^b f(y_2) \cdots \left[\int_{y_{n-4}}^b f(y_{n-3}) \frac{[1 - F(y_{n-3})]^3}{2 \cdot 3} dy_{n-3} \right] \cdots dy_2$$

\vdots

$$= n! f(y_1) \frac{[1 - F(y_1)]^{n-1}}{(n-1)!}.$$

$$\therefore g_1(y_1) = \begin{cases} n f(y_1) [1 - F(y_1)]^{n-1} & , \quad a < y_1 < b, \\ 0 & , \quad \text{e.w.} \end{cases}$$

ويمكن إيجاد دالة التوزيع التجميعي للمتغير Y_1 وهي:

$$\begin{aligned} F_{1:n}(y_1) &= \int_a^{y_1} g_1(x) dx \\ &= \int_a^{y_1} n f(x) [1 - F(x)]^{n-1} dx \\ &= -[1 - F(x)]^n \Big|_a^{y_1}. \end{aligned}$$

$$\therefore F_{1:n}(y_1) = \begin{cases} 0 & y_1 \leq a, \\ 1 - [1 - F(y_1)]^n & a < y_1 < b, \\ 1 & y_1 \geq b. \end{cases}$$

وكذلك دالة التوزيع لـ Y_n هي:

$$\begin{aligned} F_{n:n}(y_n) &= \int_a^{y_n} g_n(x) dx \\ &= n \int_a^{y_n} f(x) [F(x)]^{n-1} dx \\ &= [F(x)]^n \Big|_a^{y_n}. \end{aligned}$$

$$F_{n:n}(y_n) = \begin{cases} 0 & y_n \leq a, \\ [F(y_n)]^n & a < y_n < b, \\ 1 & y_n \geq b. \end{cases}$$

نلاحظ أننا اعتمدنا على المثال (١-١-٣) في التكمالات وباستخدام نفس الإجراء يمكننا إيجاد

توزيع أي إحصاء ترتيبي Y_r ($r = 1, 2, \dots, n$) كما في النظرية التالية:

نظرية (٣-٢-١):

إذا كانت X_1, X_2, \dots, X_n عناصر عينة عشوائية من الحجم n مسحوبة من توزيع احتمالي متصل وله دالة كثافة احتمالية $f(x)$ وكانت المتغيرات العشوائية $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n$ الإحصاءات الترتيبية لتلك العينة. عندها فإن أي إحصاء Y_r ($r=1, 2, \dots, n$) له دالة كثافة الاحتمال الهامشية:

$$g_r(y_r) = \begin{cases} \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} f(y_r) [F(y_r)]^{r-1} [1-F(y_r)]^{n-r}, & a < y_r < b, \\ 0 & \text{e.w.} \end{cases}$$

البرهان:

لاحظ إننا سنكامل على مجموعة المتغيرات $y_1, y_2, \dots, y_{r-1}, y_{r+1}, \dots, y_n$ لذلك سنقسمها إلى مجموعتين. نجري التكامل بدءاً بالمتغير y_n نزولاً لغاية المتغير y_{r+1} ($n-r$ من المتغيرات)، ومن ثم نكامل بدءاً بالمتغير y_1 صعوداً لغاية المتغير y_{r-1} ($r-1$ من المتغيرات) أذن:

$$g_r(y_r) = n! f(y_r) \int_a^{y_r} \dots \int_a^{y_3} \int_a^{y_2} \dots \int_{y_{n-2}}^b \int_{y_{n-1}}^b f(y_1) f(y_2) \dots f(y_{r-1}) f(y_{r+1}) \dots f(y_n) dy_n dy_{n-1} \dots dy_{r+1} \cdot dy_1 dy_2 \dots dy_{r-1}$$

$$= n! f(y_r) \int_a^{y_r} \dots \int_a^{y_3} \int_a^{y_2} f(y_{r-1}) \dots f(y_2) f(y_1) dy_1 dy_2 \dots dy_{r-1} \int_{y_r}^b \dots \int_{y_{n-2}}^b \int_{y_{n-1}}^b f(y_{r+1}) \dots f(y_n) dy_n dy_{n-1} \dots dy_{r+1}$$

$$= n! f(y_r) \frac{[F(y_r)]^{r-1}}{(r-1)!} \frac{[1-F(y_r)]^{n-r}}{(n-r)!}.$$

$$\therefore g_r(y_r) = \begin{cases} \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} f(y_r) [F(y_r)]^{r-1} [1-F(y_r)]^{n-r}, & a < y_r < b, \\ 0 & \text{e.w.} \end{cases}$$

نظرية (٤-٢-١):

إذا كانت X_1, X_2, \dots, X_n عناصر عينة عشوائية من الحجم n مسحوبة من توزيع احتمالي متصل وله دالة كثافة احتمالية $f(x)$ وكانت المتغيرات العشوائية $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n$ الإحصاءات الترتيبية لتلك العينة. عندها فإن أي إحصاءين Y_i, Y_j بحيث $i < j$ ، $i, j=1, 2, \dots, n$ لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة:

$$g_{ij}(y_i, y_j) = \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} f(y_i) f(y_j) [F(y_i)]^{i-1} \\ [F(y_j) - F(y_i)]^{j-i-1} [1 - F(y_j)]^{n-j}, \quad a < y_i < y_j < b, \\ = 0, \quad \text{e.w.}$$

البرهان:

سنعتمد في البرهان على نفس أسلوب النظريات السابقة إلى جانب التكامل التالي:

$$\int_x^y [F(y) - F(w)]^{r-1} f(w) dw = - \frac{[F(y) - F(w)]^r}{r} \Big|_x^y \\ = \frac{[F(y) - F(x)]^r}{r},$$

لاحظ إننا سنكامل على مجموعة المتغيرات:

$$y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n.$$

سنجري التكامل بدءاً بالمتغير y_n نزولاً لغاية المتغير y_{j+1} ($n-j$ من المتغيرات)، ومن ثم نكامل بدءاً بالمتغير y_{j-1} نزولاً لغاية المتغير y_{i+1} ($j-i-1$ من المتغيرات)، ومن ثم نكامل بدءاً بالمتغير y_1 صعوداً لغاية المتغير y_{i-1} ($i-1$ من المتغيرات).

$$g_{ij}(y_i, y_j) = n! f(y_i) f(y_j) \int_a^{y_i} \dots \int_a^{y_2} \int_{y_i}^{y_j} \dots \int_{y_{j-2}}^{y_j} \int_{y_{j-1}}^b \dots \int_{y_{n-1}}^b \\ f(y_1) f(y_2) \dots f(y_{i-1}) f(y_{i+1}) \dots f(y_{j-1}) f(y_{j+1}) \dots f(y_n) \\ dy_n \dots dy_{j+1} dy_{j-1} \dots dy_{i+1} dy_1 \dots dy_{i-1} . \\ \therefore g_{ij}(y_i, y_j) = n! f(y_i) f(y_j) \int_a^{y_i} \dots \int_a^{y_2} f(y_{i-1}) \dots f(y_1) dy_1 \dots dy_{i-1} \\ \int_{y_i}^{y_j} \dots \int_{y_{j-2}}^{y_j} f(y_{i+1}) \dots f(y_{j-1}) dy_{j-1} \dots dy_{i+1} \\ \int_{y_j}^b \dots \int_{y_{n-1}}^b f(y_{j+1}) \dots f(y_n) dy_n \dots dy_{j+1} \\ = n! f(y_i) f(y_j) \frac{[F(y_i)]^{i-1}}{(i-1)!} \frac{[F(y_j) - F(y_i)]^{j-i-1}}{(j-i-1)!} \frac{[1 - F(y_j)]^{n-j}}{(n-j)!}.$$

$$\therefore g_{ij}(y_i, y_j) = \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} f(y_i) f(y_j) [F(y_i)]^{i-1} [F(y_j) - F(y_i)]^{j-i-1} [1 - F(y_j)]^{n-j}, \quad a < y_i < y_j < b, \\ = 0, \quad \text{e.w.}$$

وإذا فرضنا أن :

$$z_1 = i-1, \quad z_2 = j-i-1, \quad z_3 = n-j, \\ p_1 = F(y_i), \quad p_2 = F(y_j) - F(y_i), \quad p_3 = 1 - F(y_j), \\ \text{ونجد أن } z_1 + z_2 + z_3 = n-2 \text{ و } p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ \text{وعليه فإن:}$$

$$g_{ij}(y_i, y_j) = n(n-1) \frac{(n-2)!}{z_1! z_2! z_3!} p_1^{z_1} p_2^{z_2} p_3^{z_3} f(y_i) f(y_j).$$

يلاحظ من الصيغة الأخيرة أن معامل $f(y_i) f(y_j)$ يمثل توزيع متعدد الحدود بثلاث متغيرات مضروب بالعدد $n(n-1)$.

مثال (١-٢-١):

لتكن $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_6$ الإحصاءات الترتيبية لعينة عشوائية حجمها $n=6$ سحبت من توزيع له دالة كثافة احتمالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad 0 < x < 2, \\ 0 & , \quad \text{e.w.} \end{cases}$$

أوجد:

- (1) $g_r(y_r)$
- (2) $g_1(y_1)$
- (3) $g_6(y_6)$
- (4) $g_{1,6}(y_1, y_6)$.

الحل:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0, \\ \frac{x}{2} & , \quad 0 < x < 2, \\ 1 & , \quad x \geq 2. \end{cases}$$

$$(1) \quad g_r(y_r) = \frac{6!}{(r-1)!(6-r)!} \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{y_r}{2}\right)^{r-1} \left(1 - \frac{y_r}{2}\right)^{6-r}$$

$$= \begin{cases} \frac{6!}{(r-1)!(6-r)!} 2^{-6} y_r^{r-1} (2 - y_r)^{6-r} & , \quad 0 < y_r < 2, \\ 0 & , \quad \text{e.w.} \end{cases}$$

وعليه إذا كانت $r=1$ فإن:

$$(2) \quad g_1(y_1) = \begin{cases} \frac{6}{2^6} (2 - y_1)^5 & , \quad 0 < y_1 < 2, \\ 0 & , \quad \text{e.w.} \end{cases}$$

وعندما $r=6$ فإن:

$$(3) \quad g_6(y_6) = \begin{cases} \frac{6}{2^6} y_6^5 & , \quad 0 < y_6 < 2, \\ 0 & , \quad \text{e.w.} \end{cases}$$

$$(4) \quad g_{1,6}(y_1, y_6) = \frac{6!}{4!} \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{y_6 - y_1}{2}\right)^4$$

$$= \begin{cases} \frac{30}{2^6} (y_6 - y_1)^4 & , \quad 0 < y_1 < y_6 < 2, \\ 0 & , \quad \text{e.w.} \end{cases}$$

مثال (١-٢-٢):

لتكن X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 تمثل قياسات عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع ذا توزيع بيتا بالمعلمتين $\alpha = 2, \beta = 1$ و بفرض أن $Y_1 < Y_2 < Y_3 < Y_4 < Y_5$ يمثل الاحصاءات الترتيبية لهذه العينة أوجد:

- (١) توزيع القيمة العظمى ثم احسب توقع هذه القيمة.
- (٢) توزيع القيمة الصغرى ثم احسب $P(Y_1 < 0.2)$.
- (٣) توزيع القيمة الوسطى ثم أوجد تباين هذه القيمة.
- (٤) التوزيع المشترك لـ Y_4, Y_2 ومعامل الارتباط $\rho_{2,4}$.

الحل :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 < x < 1, \\ 0 & , \quad \text{e.w.} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0, \\ x^2 & , 0 < x < 1, \\ 1 & , x \geq 1. \end{cases}$$

(١) توزيع القيمة العظمى هو:

$$g_5(y_5) = 5(2y_5)(y_5)^4 \\ = \begin{cases} 10y_5^9 & , 0 < y_5 < 1, \\ 0 & , \text{e.w.} \end{cases}$$

$$E(Y_5) = 10 \int_0^1 y_5^{10} dy_5 = \frac{10}{11} [y_5^{11}]_0^1 = \frac{10}{11}.$$

(٢) توزيع القيمة الصغرى هو:

$$g_1(y_1) = 5(2y_1)[1 - y_1^2]^4 \\ = \begin{cases} 10y_1(1 - y_1^2)^4 & , 0 < y_1 < 1, \\ 0 & , \text{e.w.} \end{cases}$$

$$P(Y_1 < .2) = 10 \int_0^{.2} y_1(1 - y_1^2)^4 dy_1 \\ = -(1 - y_1^2)^5 \Big|_0^{.2} = .185.$$

(٣) توزيع القيمة الوسطى هو:

$$g_3(y_3) = \frac{5!}{2! 2!} (2y_3)(y_3^2)^2(1 - y_3^2)^2 \\ = \begin{cases} 60y_3^5(1 - y_3^2)^2 & , 0 < y_3 < 1, \\ 0 & , \text{e.w.} \end{cases}$$

حساب $\text{Var}(Y_3)$:

$$\text{Var}(Y_3) = E(Y_3^2) - [E(Y_3)]^2,$$

$$E(Y_3) = \int_0^1 y_3 g_3(y_3) dy_3 \\ = 60 \int_0^1 y_3^6(1 - y_3^2)^2 dy_3 \\ = 60 \int_0^1 y_3^6(1 - 2y_3^2 + y_3^4) dy_3$$

$$\begin{aligned}
 &= 60 \int_0^1 (y_3^6 - 2y_3^8 + y_3^{10}) dy_3 \\
 E(Y_3) &= \frac{160}{231} \\
 E(Y_3^2) &= \int_0^1 y_3^2 g_3(y_3) dy_3 \\
 &= 60 \int_0^1 y_3^7 (1 - 2y_3^2 + y_3^4) dy_3 \\
 &= 60 \int_0^1 (y_3^7 - 2y_3^9 + y_3^{11}) dy_3 \\
 E(Y_3^2) &= \frac{1}{2}, \\
 \text{Var}(Y_3) &= \frac{1}{2} - \left(\frac{160}{231} \right)^2 \\
 &= .0202.
 \end{aligned}$$

(٤) التوزيع المشترك Y_2, Y_4 هو:

$$\begin{aligned}
 g_{2,4}(y_2, y_4) &= \frac{5!}{1! 1! 1!} (2y_2)(2y_4)(y_2^2)(y_4^2 - y_2^2)(1 - y_4^2) \\
 &= \begin{cases} 480 y_2^3 y_4 (y_4^2 - y_2^2)(1 - y_4^2) & , \quad 0 < y_2 < y_4 < 1, \\ 0 & , \quad \text{e.w.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

لإيجاد $\rho_{2,4}$ (معامل الارتباط) نتبع الآتي:

$$\rho_{2,4} = \frac{\sigma_{2,4}}{\sigma_2 \sigma_4}$$

$$\sigma_{2,4} = E(Y_2 Y_4) - E(Y_2)E(Y_4)$$

وعلي ذلك لإيجاد $\rho_{2,4}$ نحسب $E(Y_2 Y_4), E(Y_2), E(Y_4), \sigma_2, \sigma_4$. أولاً نوجد توزيع كلٍّ من Y_2, Y_4 على النحو التالي:

$$\begin{aligned}
 g_2(y_2) &= \begin{cases} 40 y_2^3 (1 - y_2^2)^3 & , \quad 0 < y_2 < 1 \\ 0 & , \quad \text{e.w.} \end{cases} \\
 g_4(y_4) &= \begin{cases} 40 y_4^7 (1 - y_4^2) & , \quad 0 < y_4 < 1 \\ 0 & , \quad \text{e.w.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

ومن هنا يمكن حساب:

$$E(Y_2) = \frac{128}{231}, \quad E(Y_2^2) = \frac{1}{3}, \quad \sigma_2 = .1621 = \text{Var}(Y_2),$$

$$E(Y_4) = \frac{80}{99}, \quad E(Y_4^2) = \frac{2}{3}, \quad \sigma_4 = .1169 = \text{Var}(Y_4),$$

$$\begin{aligned} E(Y_2 Y_4) &= 480 \int_0^1 \int_0^{y_4} y_2^4 y_4^2 (y_4^2 - y_2^2) (1 - y_4^2) dy_2 dy_4 \\ &= 480 \int_0^1 \int_0^{y_4} y_4^2 (1 - y_4^2) (y_2^4 y_4^2 - y_2^6) dy_2 dy_4 \\ &= 480 \int_0^1 y_4^2 (1 - y_4^2) \left(\frac{y_2^5 y_4^2}{5} - \frac{y_2^7}{7} \right) \Big|_0^{y_4} dy_4 \\ &= 480 \int_0^1 y_4^2 (1 - y_4^2) \left(\frac{y_4^7}{5} - \frac{y_4^7}{7} \right) dy_4 \\ &= \frac{192}{7} \int_0^1 (y_4^9 - y_4^{11}) dy_4 = \frac{16}{35}, \end{aligned}$$

التغاير بين Y_2, Y_4 هو:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_2, Y_4) &= E(Y_2 Y_4) - E(Y_2)E(Y_4) \\ \sigma_{2,4} &= \frac{16}{35} - \left(\frac{128}{231} \right) \left(\frac{80}{99} \right) \\ &= 0.00937, \end{aligned}$$

معامل الارتباط هو

$$\rho_{2,4} = \frac{0.00937}{(.1621)(.1169)} = 0.4944.$$

 مثال (١-٢-٣):

للمثال السابق بفرض $n = 4$ أوجد $P(Y_3 > \frac{1}{2})$.

الحل :

$$\begin{aligned} g_3(y_3) &= \frac{4!}{2! 1!} (2y_3) (y_3^2)^2 (1 - y_3^2) \\ &= \begin{cases} 24 y_3^5 (1 - y_3^2) & , \quad 0 < y_3 < 1, \\ 0 & , \quad \text{e.w.} \end{cases} \end{aligned}$$

$$P(Y_3 > \frac{1}{2}) = 24 \int_{\frac{1}{2}}^1 y_3^5 (1 - y_3^2) dy_3$$

$$= 24 \int_{\frac{1}{2}}^1 (y_3^5 - y_3^7) dy_3 = \frac{243}{256}.$$

مثال (١-٢-٤):

لتكن $Y_1 < Y_2 < Y_3 < Y_4 < Y_5$ الإحصاءات الترتيبية لعينة عشوائية حجمها $n = 5$ مأخوذة من توزيع له دالة كثافة احتمالية:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & 0 < x, \\ 0, & \text{e.w.} \end{cases}$$

برهن إن الإحصاءين $Z_1 = Y_2$ و $Z_2 = Y_4 - Y_2$ مستقلين إحصائياً.
الحل :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & 0 < x, \\ 0, & \text{e.w.} \end{cases}$$

دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لـ Y_4, Y_2 تعطى من:

$$g_{2,4}(y_2, y_4) = \frac{5!}{1!1!1!1!} e^{-y_2} e^{-y_4} (1 - e^{-y_2}) (e^{-y_2} - e^{-y_4}) (e^{-y_4})$$

$$= 120 e^{-y_2} e^{-2y_4} (1 - e^{-y_2}) (e^{-y_2} - e^{-y_4}), \quad 0 < y_2 < y_4 < \infty,$$

$$= 0, \quad \text{e.w.}$$

ولنعتبر التحويلة الأحادية:

$$T: z_1 = y_2, \quad z_2 = y_4 - y_2$$

عندها فإن التحويلة العكسية لها هي:

$$T^{-1}: y_2 = z_1, \quad y_4 = z_2 + z_1,$$

ومن هنا نحسب جاكوبيان التحويل:

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

وطبقاً لذلك فإن دالة كثافة الاحتمال المشتركة لـ Z_1, Z_2 هي:

$$h(z_1, z_2) = 120 e^{-z_1} e^{-2(z_1+z_2)} (1 - e^{-z_1}) (e^{-z_1} - e^{-(z_1+z_2)})$$

$$= 120 e^{-4z_1} (1 - e^{-z_1}) e^{-2z_2} (1 - e^{-z_2}), \quad 0 < z_1 < \infty, 0 < z_2 < \infty$$

$$= 0, \quad \text{e.w.}$$

ولإثبات الاستقلال يكفي برهان إن $h(z_1, z_2) = h_1(z_1) \cdot h_2(z_2)$ كالآتي:

$$\begin{aligned}
 h_1(z_1) &= \int_0^{\infty} h(z_1, z_2) dz_2 \\
 &= 120 e^{-4z_1} (1 - e^{-z_1}) \int_0^{\infty} e^{-2z_2} (1 - e^{-z_2}) dz_2 \\
 &= 120 e^{-4z_1} (1 - e^{-z_1}) \int_0^{\infty} (e^{-2z_2} - e^{-3z_2}) dz_2 \\
 &= 120 e^{-4z_1} (1 - e^{-z_1}) \left[\frac{e^{-2z_2}}{-2} - \frac{e^{-3z_2}}{-3} \right]_0^{\infty} \\
 \therefore h_1(z_1) &= 20 e^{-4z_1} (1 - e^{-z_1}), \quad 0 < z_1 < \infty, \\
 &= 0, \quad \text{e.w.}
 \end{aligned}$$

وبالمثل:

$$\begin{aligned}
 h_2(z_2) &= \int_0^{\infty} h(z_1, z_2) dz_1 \\
 &= 120 e^{-2z_2} (1 - e^{-z_2}) \int_0^{\infty} e^{-4z_1} (1 - e^{-z_1}) dz_1 \\
 &= 120 e^{-2z_2} (1 - e^{-z_2}) \int_0^{\infty} (e^{-4z_1} - e^{-5z_1}) dz_1 \\
 &= 120 e^{-2z_2} (1 - e^{-z_2}) \left[\frac{e^{-4z_1}}{-4} - \frac{e^{-5z_1}}{-5} \right]_0^{\infty} \\
 h_2(z_2) &= 6 e^{-2z_2} (1 - e^{-z_2}), \quad 0 < z_2 < \infty, \\
 &= 0, \quad \text{e.w.}
 \end{aligned}$$

نجد إن $h(z_1, z_2) = h_1(z_1) \cdot h_2(z_2)$ فعلاً وبالتالي فإنهما مستقلين إحصائياً.

مثال (١-٢-٥):

لتكن $Y_1 < Y_2 < Y_3$ الإحصائيات الترتيبية لعينة عشوائية من الحجم $n=3$ مأخوذة من توزيع له دالة كثافة احتمالية على الصورة:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < x < 1, \\ 0 & , \quad \text{e.w.} \end{cases}$$

أوجد دالة كثافة الاحتمال لمدى العينة $Z_1 = Y_3 - Y_1$.

الحل :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0, \\ x & , 0 < x < 1, \\ 1 & , x \geq 1. \end{cases}$$

نجد أن دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لـ Y_3, Y_1 هي:

$$g_{1,3}(y_1, y_3) = \begin{cases} 6(y_3 - y_1) & , 0 < y_1 < y_3 < 1, \\ 0 & , \text{e.w.} \end{cases}$$

ولنعتبر التحويلة الأحادية:

$$T: z_2 = y_3, \quad z_1 = y_3 - y_1,$$

عندها فإن التحويلة العكسية لها هي:

$$T^{-1}: y_3 = z_2, \quad y_1 = z_2 - z_1,$$

ومن هنا نحسب جاكوبيان التحويل :

$$J = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

وطبقا لذلك فإن دالة كثافة الاحتمال المشتركة لـ Z_1, Z_2 هي:

$$\begin{aligned} h(z_1, z_2) &= 6(z_2 - z_2 + z_1) \\ &= 6z_1, \quad 0 < z_1 < z_2 < 1, \\ &= 0, \quad \text{e.w.} \end{aligned}$$

وطبقا لذلك فإن دالة كثافة الاحتمال لمدى العينة هي:

$$\begin{aligned} h_1(z_1) &= \int_{z_1}^1 6z_1 dz_2 \\ &= 6z_1(1 - z_1), \quad 0 < z_1 < 1, \\ &= 0, \quad \text{e.w.} \end{aligned}$$

مثال (١-٢-٦):

للمثال السابق عندما $n = 4$ أوجد دالة كثافة الاحتمال لـ Y_3 واحسب الاحتمال

$$P\left(\frac{1}{3} < Y_3 < \frac{2}{3}\right).$$

الحل :

$$n = 4, \quad r = 3,$$

$$g_3(y_3) = \frac{4!}{2!1!} (1)(y_3)^2(1-y_3)$$

$$= 12 y_3^2(1-y_3) \quad , \quad 0 < y_3 < 1,$$

$$= 0 \quad , \quad \text{e.w.}$$

$$P\left(\frac{1}{3} < Y_3 < \frac{2}{3}\right) = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} g_3(y_3) dy_3 = 12 \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} y_3^2(1-y_3) dy_3$$

$$= 12 \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} (y_3^2 - y_3^3) dy_3$$

$$= \frac{13}{27}.$$

طريقة بديلة لإشتقاق التوزيعات الهامشية والمشتركة للإحصاءات الترتيبية:

والآن نستطيع استخدام طريقة بسيطة جداً للحصول على التوزيعات الهامشية والمشتركة للإحصاءات الترتيبية بالاعتماد على نظرية الاحتمالات بدلاً من الطرق الرياضية البحتة. سنوضح التقنية المستخدمة بإعطاء مثال في حالة إحصاء ترتيبي واحد Y_r لعينة عشوائية تتبع توزيع متصل بدالة كثافة احتمال $f(x)$ ودالة توزيع تجميعي $F(x)$. من نظرية الاحتمالات يمكن تعريف دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ كالتالي:

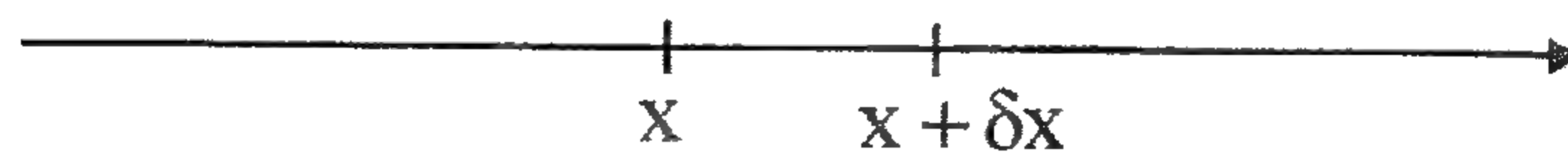
$$f(x) = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \delta x) - F(x)}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < X < x + \delta x)}{\delta x},$$

وبتطبيق التعريف السابق على دالة كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبي Y_r نحصل على:

$$g_r(x) = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < Y_r < x + \delta x)}{\delta x} \quad , \quad (x = y_r).$$

ولنفترض أننا قسمنا المحور X إلى ثلاث فترات كالتالي:



$$I_1 = (-\infty, x],$$

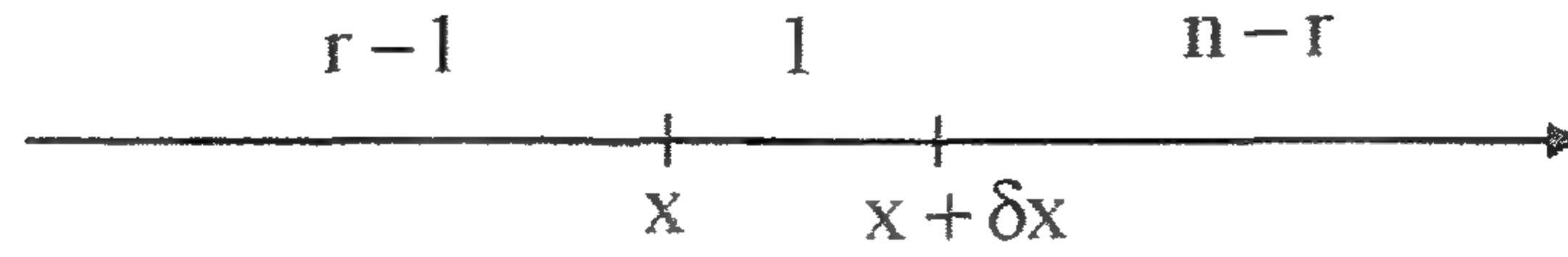
$$I_2 = (x, x + \delta x],$$

$$I_3 = (x + \delta x, \infty),$$

ولنعتبر الحادثة:

$$x < Y_r < x + \delta x$$

إذا ما كان δx صغيرة كفاية بحيث تكون إمكانية وقوع اثنين (أو أكثر) من X_i في الفترة I_2 مستحيلة، فإنه يمكن القول إن $(r-1)$ من المتغيرات X_i تقع في الفترة I_1 وتحقق إن $X_i \leq x$ ، بينما متغير واحد يقع في الفترة I_2 ، و $(n-r)$ من المتغيرات X_i تقع في الفترة I_3 .



عندها فإن طرق ترتيب المتغيرات في الفترات الثلاث السابقة هي:

$$\frac{n!}{(r-1)! 1! (n-r)!}$$

بينما كل طريقة لها الاحتمال:

$$[F(x)]^{r-1} [F(x + \delta x) - F(x)] [1 - F(x + \delta x)]^{n-r},$$

لأن احتمال وقوع أي من المتغيرات العشوائية في إحدى الفترات الثلاث هي:

$$P(X_i \leq x) = F(x),$$

$$P(x < X_i < x + \delta x) = F(x + \delta x) - F(x),$$

$$P(X_i \geq x + \delta x) = 1 - F(x + \delta x).$$

وحيث إن X_1, X_2, \dots, X_n متغيرات مستقلة ومتطابقة فإن:

$$P(x < Y_r < x + \delta x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}$$

$$[F(x)]^{r-1} [F(x + \delta x) - F(x)] [1 - F(x + \delta x)]^{n-r},$$

وبالتالي فإن:

$$\begin{aligned} g_r(x) &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} [F(x)]^{r-1} \\ &\quad \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{[F(x + \delta x) - F(x)]}{\delta x} \lim_{\delta x \rightarrow 0} [1 - F(x + \delta x)]^{n-r} \\ &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} [F(x)]^{r-1} f(x) [1 - F(x)]^{n-r}. \end{aligned}$$

وهي نفس النتيجة التي وصلنا إليها باستخدام الطرق الرياضية البحتة.

مثال (٧-٢-١):

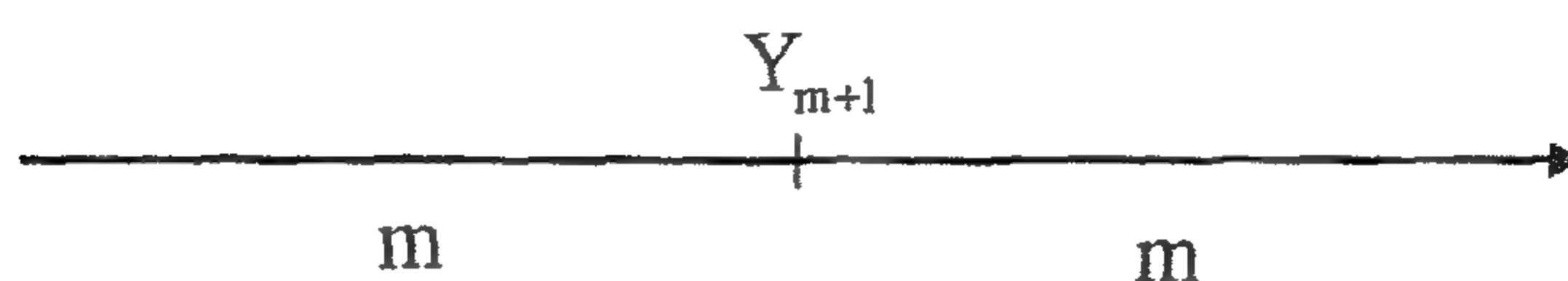
لتكن $X_1, X_2, \dots, X_{2m+1}$ عينة عشوائية من التوزيع المنتظم القياسي، أوجد دالة الكثافة الاحتمالية للوسيط. ($2m+1=n$ ، فرديه و m عدد صحيح موجب).

الحل:

وسيط العينة هو الإحصاء الترتيبي Y_{m+1} وحيث:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , 0 < x < 1, \\ 0 & , \text{e.w.} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0, \\ x & , 0 < x < 1, \\ 1 & , x \geq 1. \end{cases}$$



$$\therefore g_{m+1}(x) = \frac{(2m+1)!}{m! m!} x^m (1-x)^m, \quad 0 < x < 1,$$

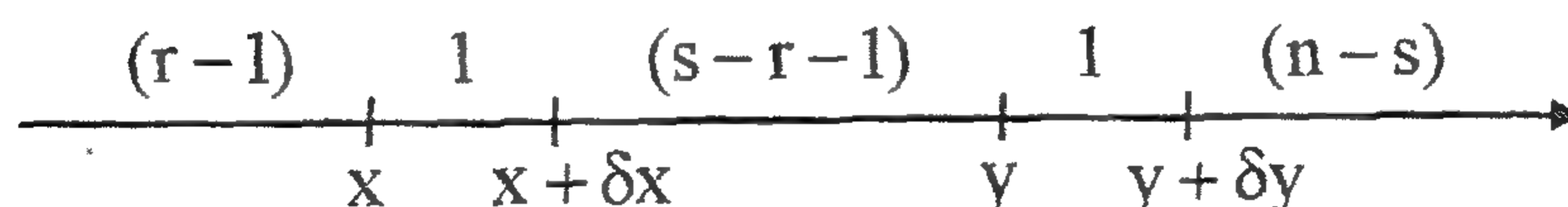
$$= 0, \quad \text{e.w.}$$

لاحظ إن $g_{m+1}(x)$ تمثل دالة كثافة احتمال لتوزيع بيتا بالمعالم $\alpha = m+1, \beta = m+1$.

وبالمثل يمكن إيجاد دالة كثافة الاحتمال المشتركة لزوج من الإحصاءات الترتيبية. وليكن Y_r, Y_s حيث $r < s$ إحصاءين ترتيبيين لعينة عشوائية تتبع توزيع متصل بدالة كثافة احتمال $f(x)$ ودالة توزيع تجميعي $F(x)$ ، عندها فإن دالة كثافة الاحتمال المشتركة لـ Y_r, Y_s يمكن إيجادها كالتالي:

$$g_{r,s}(x,y) = \lim_{\substack{\delta x \rightarrow 0 \\ \delta y \rightarrow 0}} \frac{P(x < Y_r < x + \delta x, y < Y_s < y + \delta y)}{\delta x \delta y},$$

حيث يمكن تقسيم المحور X إلى خمس فترات كالتالي:



$$I_1 = (-\infty, x],$$

$$I_2 = (x, x + \delta x],$$

$$I_3 = (x + \delta x, y],$$

$$I_4 = (y, y + \delta y],$$

$$I_5 = (y + \delta y, \infty).$$

ولنعتبر الحادثة:

$$x < Y_r < x + \delta x, y < Y_s < y + \delta y.$$

وعندما تكون $\delta y, \delta x$ صغيرتان كفاية بحيث إن إمكانية وقوع اثنين أو أكثر من المتغيرات X_i في الفترة I_2 أو I_4 مستحيلة، عندها يمكن القول إن $(r-1)$ من المتغيرات X_i تقع في الفترة I_1 وتحقق $X_i \leq x$ ، بينما متغير واحد يقع في الفترة I_2 ، و $(s-r-1)$ من المتغيرات X_i تقع في الفترة I_3 ، ومتغير واحد في الفترة I_4 ، و $(n-s)$ من المتغيرات X_i تقع في الفترة I_5 وطرق ترتيب المشاهدات على الفترات الخمس هي:

$$\frac{n!}{(r-1)! 1! (s-r-1)! 1! (n-s)!}$$

بينما كل طريقة لها الاحتمال:

$$[F(x)]^{r-1} [F(x + \delta x) - F(x)] [F(y) - F(x + \delta x)]^{s-r-1} \\ [F(y + \delta y) - F(y)] [1 - F(y + \delta y)]^{n-s}.$$

لأن احتمال وقوع أي من المتغيرات العشوائية في إحدى الفترات الخمس هي:

$$P(X_i \leq x) = F(x),$$

$$P(x < X_i < x + \delta x) = F(x + \delta x) - F(x),$$

$$P(x + \delta x < X_i < y) = F(y) - F(x + \delta x),$$

$$P(y < X_i < y + \delta y) = F(y + \delta y) - F(y),$$

$$P(X_i \geq y + \delta y) = 1 - F(y + \delta y).$$

وحيث إن X_1, X_2, \dots, X_n متغيرات مستقلة ومتطابقة فإن:

$$P(x < Y_r < x + \delta x, y < Y_s < y + \delta y) = \frac{n!}{(r-1)! (s-r-1)! (n-s)!}$$

$$[F(x)]^{r-1} [F(x + \delta x) - F(x)] [F(y) - F(x + \delta x)]^{s-r-1} \\ [F(y + \delta y) - F(y)] [1 - F(y + \delta y)]^{n-s}.$$

ومنه فإن:

$$g_{r,s}(x, y) = \lim_{\substack{\delta x \rightarrow 0 \\ \delta y \rightarrow 0}} \frac{P(x < Y_r < x + \delta x, y < Y_s < y + \delta y)}{\delta x \delta y} \\ = \frac{n!}{(r-1)! (s-r-1)! (n-s)!} [F(x)]^{r-1} \lim_{\substack{\delta x \rightarrow 0 \\ \delta y \rightarrow 0}} \frac{[F(x + \delta x) - F(x)]}{\delta x} \\ \lim_{\substack{\delta x \rightarrow 0 \\ \delta y \rightarrow 0}} [F(y) - F(x + \delta x)]^{s-r-1} \lim_{\substack{\delta x \rightarrow 0 \\ \delta y \rightarrow 0}} \frac{[F(y + \delta y) - F(y)]}{\delta y} \\ \lim_{\substack{\delta x \rightarrow 0 \\ \delta y \rightarrow 0}} [1 - F(y + \delta y)]^{n-s}.$$

$$\therefore g_{r,s}(x,y) = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}$$

$$[F(x)]^{r-1} f(x) [F(y) - F(x)]^{s-r-1} f(y) [1 - F(y)]^{n-s}.$$

وهي أيضاً نفس النتيجة التي توصلنا إليها باستخدام الطرق الرياضية البحتة. ولكن هذه الطريقة أكثر مرونة ويمكن استخدامها لإيجاد دالة الكثافة المشتركة لأكثر من إحصاءين ترتيبيان. وبشكل عام لأي $k \leq n$ نستطيع إيجاد دالة كثافة الاحتمال لأي k من الإحصاءات الترتيبية بتقسيم المحور X لـ $2k+1$ من الفترات وإتباع نفس الخطوات فنحصل على دالة كثافة الاحتمال المشتركة لـ $Y_{n_1}, Y_{n_2}, \dots, Y_{n_k}$ حيث $1 \leq k \leq n$ ، $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k \leq n$ وذلك كالتالي:

$$g_{n_1, n_2, \dots, n_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{n!}{(n_1-1)!(n_2-n_1-1)! \dots (n-n_k)!}$$

$$[F(x_1)]^{n_1-1} f(x_1) [F(x_2) - F(x_1)]^{n_2-n_1-1} f(x_2) \dots$$

$$f(x_k) [1 - F(x_k)]^{n-n_k}, \quad a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_k \leq b.$$

وباعتبار $x_0 = -\infty$, $x_{k+1} = \infty$, $n_0 = 0$, $n_{k+1} = n+1$ يمكننا كتابة:

$$g_{n_1, n_2, \dots, n_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) = n! \prod_{j=0}^k f(x_j) \frac{[F(x_{j+1}) - F(x_j)]^{n_{j+1}-n_j-1}}{(n_{j+1}-n_j-1)!}$$

$$, \quad a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_k \leq b.$$

ومن الصيغة السابقة يمكننا اشتقاق دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لكل الإحصاءات الترتيبية وهي كالتالي:

$$g_{1,2,\dots,n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = n! \prod_{j=0}^n f(x_j), \quad a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b.$$

(٣-١) أمثلة وتطبيقات على الإحصاءات الترتيبية:

(١-٣-١) اختبارات الحياة:

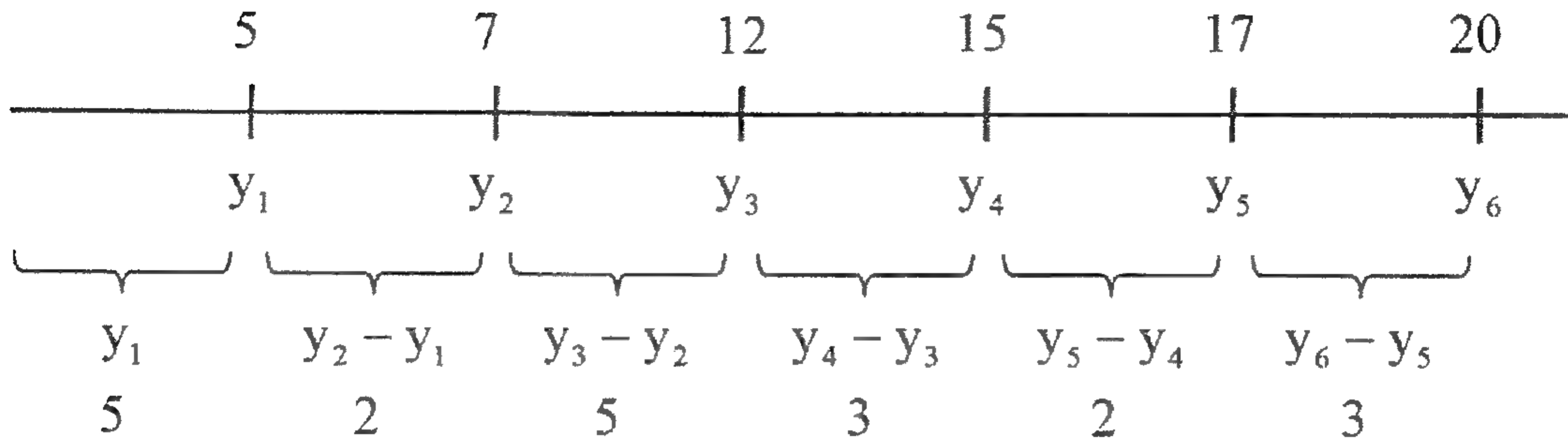
تستخدم الإحصاءات الترتيبية في الكثير من التطبيقات ولها أهمية بارزة في اختبارات الحياة، مثلاً إذا كان لدينا X_1, X_2, \dots, X_n متغيرات عشوائية تمثل زمن الحياة لـ n من الوحدات فإن الإحصاء الترتيبي Y_1 يمثل زمن الحياة للوحدة التي تفشل أولاً و Y_2 زمن الحياة للوحدة التي تفشل ثانياً وهكذا.

مثال (١-٣-١):

إذا كان لدينا 6 وحدات وتقوم التجربة على تسجيل زمن الفشل لكل وحدة وتنتهي التجربة بفشل الوحدة السادسة وكانت المشاهدات كما يلي:

5, 7, 12, 15, 17, 20.

لاحظ إن زمن الحياة الكلي لجميع الوحدات 76 وحدة زمنية .



لاحظ إن الزمن الكلي للحياة في الفترة الأولى $ny_1 = (6)(5) = 30$ حيث n من الوحدات تعمل في هذه الفترة.

الزمن الكلي للحياة لعدد $(n - 1)$ من الوحدات في الفترة $y_2 - y_1$ هو:

$$(n - 1)(y_2 - y_1) = (5)(2) = 10.$$

الزمن الكلي للحياة لعدد $(n - 2)$ من الوحدات في الفترة $y_3 - y_2$ هو:

$$(n - 2)(y_3 - y_2) = (4)(5) = 20.$$

الزمن الكلي للحياة لعدد $(n - 3)$ من الوحدات في الفترة $y_4 - y_3$ هو:

$$(n - 3)(y_4 - y_3) = (3)(3) = 9.$$

الزمن الكلي للحياة لعدد $(n - 4)$ من الوحدات في الفترة $y_5 - y_4$ هو:

$$(n - 4)(y_5 - y_4) = (2)(2) = 4.$$

الزمن الكلي للحياة لعدد $(n - 5)$ من الوحدات في الفترة $y_6 - y_5$ هو:

$$(n - 5)(y_6 - y_5) = (1)(3) = 3.$$

ويمكن تمثيل ذلك بالجدول التالي:

الفترة	5	7	12	15	17	20	المجموع
ny_1	5	5	5	5	5	5	30
$(n-1)(y_2 - y_1)$		2	2	2	2	2	10
$(n-2)(y_3 - y_2)$			5	5	5	5	20
$(n-3)(y_4 - y_3)$				3	3	3	9
$(n-4)(y_5 - y_4)$					2	2	4
$(n-5)(y_6 - y_5)$						3	3
المجموع							76

ويمكن اعتبار $z_i = (n - i + 1)(y_i - y_{i-1})$ مشاهدات لمتغيرات عشوائية تمثل زمن الحياة الكلي خلال الفترة من فشل الوحدة $i-1$ إلى فشل الوحدة i وتكتب بصورة عامة:

$$Z_i = (n - i + 1)(Y_i - Y_{i-1}) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad , \quad Y_0 = 0$$

وفي المثال التالي سنبرهن إن هذه المتغيرات مستقلة ومتطابقة في حالة التوزيع الأسّي.

مثال (١-٣-٢):

لتكن X_1, X_2, \dots, X_n عينة عشوائية حجمها n مسحوبة من توزيع أسّي بمتوسط θ حيث.

$$f(x) = \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) \quad ; \quad \theta > 0 \quad , \quad x > 0.$$

دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للإحصاءات الترتيبية في العينة تعطى كالتالي:

$$g(y_1, y_2, \dots, y_n) = n! f(y_1) f(y_2) \cdots f(y_n)$$

$$= n! \frac{1}{\theta^n} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\theta}\right) \quad ; \quad 0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n < \infty.$$

نعتبر التحويلة الأحادية:

$$Z_1 = n Y_1$$

$$Z_2 = (n-1)(Y_2 - Y_1)$$

$$Z_3 = (n-2)(Y_3 - Y_2)$$

\vdots

$$Z_i = (n - i + 1)(Y_i - Y_{i-1}) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad , \quad Y_0 = 0$$

والتحويلة العكسية لها هي:

$$Y_i = \frac{Z_1}{n} + \frac{Z_2}{n-1} + \cdots + \frac{Z_i}{n-i+1} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

ومنها نوجد جاكوبيان التحويل كالتالي:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial z_1} & \frac{\partial y_1}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial z_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial z_1} & \frac{\partial y_2}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial z_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial z_1} & \frac{\partial y_n}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial z_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{n} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \dots & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{n!}.$$

لاحظ إن $\sum_{i=1}^n Y_i = \sum_{i=1}^n Z_i$ ، لذا فإن دالة كثافة الاحتمال المشتركة لـ Z_i و $(i=1,2,\dots,n)$ تعطى كالتالي:

$$\begin{aligned} h(z_1, z_2, \dots, z_n) &= \frac{1}{\theta^n} \exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^n z_i}{\theta}\right] \\ &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{\theta} \exp\left[-\frac{z_i}{\theta}\right]\right), \quad 0 < z_i < \infty, \\ &= 0, \quad \text{e.w.} \end{aligned}$$

مما يعني إن المتغيرات Z_i متغيرات عشوائية مستقلة ومتطابقة وكل منها يتبع التوزيع الاسي بالمعلمة θ . وسوف نستخدم لاحقاً هذا المثال لاشتقاق عزوم الإحصائيات الترتيبية في الحالة الأسية.

الآن ماذا لو كانت التجربة تقوم على اختبار زمن الحياة لـ n من الوحدات بحيث نستبدل كل وحدة تفشل بوحدة أخرى. (سحب بإرجاع) عندها فإن هناك n من الوحدات تعمل في كل فترة وزمن الحياة الكلي في الفترة من فشل الوحدة $i-1$ إلى فشل الوحدة i هو:

$$Z_i = n(Y_i - Y_{i-1}), \quad i=1,2,\dots,n, \quad Y_0=0.$$

في حالة السحب بإرجاع فإنه يمكن تعريف المتغيرات التالية:

$$W_i = Y_i - Y_{i-1}, \quad i=1,2,\dots,n, \quad Y_0=0$$

حيث W_i (i,i,d) وتتبع التوزيع الاسي بمعلمة $\frac{\theta}{n}$.

أما في حالة السحب بدون إرجاع فإنه يمكن الاعتماد على توزيع Z_i واستخدام التحويلة التالية في إيجاد التوزيع W_i $i=1,2,\dots,n$ حيث:

$$W_i = \frac{Z_i}{n-i+1}, \quad i=1,2,\dots,n,$$

وهي تحويلة أحادية والتحويلة العكسية لها هي:

$$Z_i = (n - i + 1)W_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

ومنها يمكن حساب جاكوبيان التحويل :

$$J = \begin{bmatrix} n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n-1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = n!$$

$$\therefore h_Z(z_1, z_2, \dots, z_n) = \frac{1}{\theta} \exp(-z_1/\theta) \frac{1}{\theta} \exp(-z_2/\theta) \dots \frac{1}{\theta} \exp(-z_n/\theta),$$

$$h_W(w_1, w_2, \dots, w_n) = \frac{n}{\theta} \exp(-nw_1/\theta) \frac{n-1}{\theta} \exp(-(n-1)w_2/\theta) \dots \frac{1}{\theta} \exp(-w_n/\theta).$$

مما يعني إن المتغيرات W_1, W_2, \dots, W_n متغيرات عشوائية مستقلة وكل منها يتبع التوزيع الاسي ولكنها ليست متطابقة حيث:

$$W_i \sim \text{Exp}\left(\frac{\theta}{n-i+1}\right).$$

لاحظ إن هناك فرق آخر بين إجراء التجربة بإرجاع أو بدون إرجاع. فالزمن الكلي لحياة الوحدات من بدء التجربة وحتى فشل الوحدة k في حالة السحب بدون إرجاع هو:

$$n Y_1 + (n-1)(Y_2 - Y_1) + \dots + (n-k+1)(Y_k - Y_{k-1}).$$

أما في حالة إجراء التجربة بإرجاع فإنه يساوي:

$$n Y_1 + n(Y_2 - Y_1) + \dots + n(Y_k - Y_{k-1}) = n Y_k.$$

مثال (٣-٣-١):

في اختبارات الحياة كثيراً ما تستخدم الإحصاءات الترتيبية كتقديرات لمعالم التوزيع ومثال على ذلك لتكن X_1, X_2, \dots, X_n عينة عشوائية من توزيع له دالة كثافة الاحتمال

$$f(x) = \exp[-(x - \eta)] \quad , \quad x > \eta, \\ = 0 \quad , \quad \text{e.w.}$$

ولنحاول إيجاد مقدر الإمكان الأكبر للمعلمة η كالتالي:

$$L = \exp\left[-\sum_{i=1}^n x_i + n\eta\right] \quad , \quad x_i \geq \eta, \\ = 0 \quad , \quad \text{e.w.}$$

$$\therefore \ln L = -\sum_{i=1}^n x_i + n\eta.$$

لاحظ إن الدالة $\ln L$ دالة خطية في المعلمة η لذا فإنها ليس لها نقاط حرجة ولكنها ترايدية وتأخذ أكبر قيمة لها عندما يكون η أكبر قيمة وحيث إن:

$$\eta < x_1, x_2, \dots, x_n.$$

ولذلك فإن المقدّر للمعلمة η هو:

$$\hat{\eta} = \text{Min}(X_1, X_2, \dots, X_n) = Y_1.$$

(٢-٣-١) المحاكاة:

لتكن $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n$ الإحصاءات الترتيبية لعينة عشوائية تمثل زمن حياة n من الوحدات وهو يتبع توزيع متصل له دالة كثافة احتمالية $f(x)$ ودالة التوزيع $F(x)$. إذا تم إجراء التجربة وأخذ المشاهدات بشكل ترتبي حتى $k < n$ من المشاهدات لذا يكون من المثير للاهتمام محاكاة التجربة وذلك بتوليد بيانات تتبع التوزيع ومرتبة من الأصغر إلى الأكبر. سنحاول إيجاد الاحتمال الشرطي $Y_{i+1} = y_{i+1}$ بشرط $Y_i = y_i$

$$h(y_{i+1} | y_i) = \frac{g_{i,i+1}(y_i, y_{i+1})}{g(y_i)},$$

$$g_{i,i+1}(y_i, y_{i+1}) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i-1)!} f(y_i) f(y_{i+1}) [F(y_i)]^{i-1} [1-F(y_{i+1})]^{n-i-1},$$

$$a < y_i < y_{i+1} < b,$$

$$g_i(y_i) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} f(y_i) [F(y_i)]^{i-1} [1-F(y_i)]^{n-i}.$$

وبالتالي فإن :

$$h(y_{i+1} | y_i) = \frac{g_{i,i+1}(y_i, y_{i+1})}{g(y_i)}$$

$$= (n-i) f(y_{i+1}) \frac{[1-F(y_{i+1})]^{n-i-1}}{[1-F(y_i)]^{n-i}}, \quad y_i < y_{i+1} < b.$$

ومنها يمكننا إيجاد دالة التوزيع للإحصاء Y_{i+1} بشرط $Y_i = y_i$ كالتالي:

$$\begin{aligned}
H(y_{i+1} | y_i) &= \frac{(n-i)}{[1-F(y_i)]^{n-i}} \int_{y_i}^{y_{i+1}} f(w) [1-F(w)]^{n-i-1} dw \\
&= \frac{(n-i)}{[1-F(y_i)]^{n-i}} \left[-\frac{[1-F(w)]^{n-i}}{(n-i)} \right]_{y_i}^{y_{i+1}} \\
&= \frac{1}{[1-F(y_i)]^{n-i}} \left[[1-F(y_i)]^{n-i} - [1-F(y_{i+1})]^{n-i} \right] \\
&= 1 - \left[\frac{1-F(y_{i+1})}{1-F(y_i)} \right]^{n-i}, \quad a < y_i < y_{i+1} < b.
\end{aligned}$$

ولتوليد البيانات نبدأ بتوليد الملاحظة الأولى باستخدام نظرية التكامل الاحتمالي حيث:

$$F_{\text{ln}}(y_1) = 1 - [1 - F(y_1)]^n.$$

وباعتبار:

$$v = F_{\text{ln}}(y_1),$$

نجد إن V يتبع التوزيع المنتظم في الفترة $(0,1)$ ومن السهل الحصول على ملاحظات تتبع التوزيع المنتظم (من الجداول أو بالحاسوب) وإذا حصلنا على ملاحظة v يمكننا إيجاد y_1 كما يلي:

$$\begin{aligned}
v = 1 - [1 - F(y_1)]^n &\Rightarrow 1 - v = [1 - F(y_1)]^n \\
&\Rightarrow (1 - v)^{\frac{1}{n}} = [1 - F(y_1)] \\
&\Rightarrow F(y_1) = 1 - (1 - v)^{\frac{1}{n}} \\
&\Rightarrow y_1 = F^{-1} \left(1 - (1 - v)^{\frac{1}{n}} \right).
\end{aligned}$$

ومن ثم نقوم بتوليد الملاحظة y_{i+1} بالاعتماد على الملاحظة السابقة لها كالتالي:

$$\begin{aligned}
v = H(y_{i+1} | y_i) &\Rightarrow v = 1 - \left[\frac{1 - F(y_{i+1})}{1 - F(y_i)} \right]^{n-i} \\
&\Rightarrow \left[\frac{1 - F(y_{i+1})}{1 - F(y_i)} \right]^{n-i} = 1 - v \\
&\Rightarrow \left[\frac{1 - F(y_{i+1})}{1 - F(y_i)} \right] = (1 - v)^{\frac{1}{n-i}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 1 - F(y_{i+1}) &= [1 - F(y_i)](1 - v)^{\frac{1}{n-i}} \\ \Rightarrow F(y_{i+1}) &= 1 - [1 - F(y_i)](1 - v)^{\frac{1}{n-i}} \\ \Rightarrow y_{i+1} &= F^{-1} \left[1 - [1 - F(y_i)](1 - v)^{\frac{1}{n-i}} \right]. \end{aligned}$$

وكمثال على ذلك ولتوليد المشاهدات الثلاث الأولى ($k = 3$) لعينة عشوائية حجمها $n = 5$ تتبع التوزيع الأسّي بدالة كثافة احتمال:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad 0 < x, \\ 0 & , \quad \text{e.w.} \end{cases}$$

ودالة التوزيع:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & , \quad 0 < x, \\ 0 & , \quad \text{e.w.} \end{cases}$$

وبالاعتماد على الأرقام العشوائية $v_1 = 0.1514, v_2 = 0.6697, v_3 = 0.0527$ نتبع الآتي:

$$\begin{aligned} x &= F^{-1}(w) \\ &= -\ln(1 - w). \\ y_1 &= F^{-1} \left[1 - (1 - v_1)^{\frac{1}{n}} \right] \\ &= F^{-1} \left(1 - (1 - 0.1514)^{\frac{1}{5}} \right) \\ &= F^{-1}(0.0323) \\ &= -\ln(1 - 0.0323) \\ y_1 &= 0.0328, \end{aligned}$$

وهذه هي المشاهدات الأولى ويمكن منها إيجاد المشاهدات الثانية كالتالي:

$$\begin{aligned} y_2 &= F^{-1} \left\{ 1 - [1 - F(y_1)](1 - v_2)^{\frac{1}{5-1}} \right\} \\ &= F^{-1} \left\{ 1 - [\exp(-0.0328)](1 - 0.6697)^{\frac{1}{4}} \right\} \\ &= F^{-1} [1 - (0.9677)(0.7581)] \\ &= F^{-1}(0.2664) \\ &= -\ln(1 - 0.2664) \\ \therefore y_2 &= 0.3098. \end{aligned}$$

ويمكن الحصول على المشاهدة الثالثة كالتالي:

$$\begin{aligned} y_3 &= F^{-1} \left\{ 1 - [\exp(-0.3098)](1 - 0.0527)^{\frac{1}{3}} \right\} \\ &= F^{-1} [1 - (0.7336)(0.9821)] \\ &= F^{-1}(0.2795) \\ &= -\ln(1 - 0.2795) \\ y_3 &= 0.3278. \end{aligned}$$

(١-٤) دالة التوزيع التجميعي للإحصاءات الترتيبية:

لنعتبر X_1, X_2, \dots, X_n متغيرات عشوائية مستقلة ومتطابقة ولكل منها دالة التوزيع التجميعي $F(x)$. ولتكن $F_{rn}(x)$, $r = 1, 2, \dots, n$ دالة التوزيع التجميعي للإحصاء Y_r وسنحاول إيجاد صيغة للدالة $F_{rn}(x)$ وذلك باستخدام أربع طرق مختلفة.

الطريقة الأولى:

سنوجدتها مباشرة بالتكامل واستخدام مفكوك ذي الحدين كالتالي:

$$\begin{aligned} F_{rn}(x) &= \int_{-\infty}^x g_r(t) dt \\ &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_{-\infty}^x f(t) [F(t)]^{r-1} [1-F(t)]^{n-r} dt \\ &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_{-\infty}^x f(t) [F(t)]^{r-1} \sum_{j=0}^{n-r} \binom{n-r}{j} (-1)^j [F(t)]^j dt \\ &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \sum_{j=0}^{n-r} \binom{n-r}{j} (-1)^j \int_{-\infty}^x f(t) [F(t)]^{r+j-1} dt \\ F_{rn}(x) &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \sum_{j=0}^{n-r} \binom{n-r}{j} (-1)^j \frac{[F(x)]^{r+j}}{(r+j)}. \end{aligned}$$

ومنها يمكن إثبات أن:

$$F_{rn}(-\infty) = 0,$$

$$F_{rn}(\infty) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \sum_{j=0}^{n-r} \binom{n-r}{j} (-1)^j \frac{1}{(r+j)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \sum_{j=0}^{n-r} \binom{n-r}{j} (-1)^j \int_0^1 x^{r+j-1} dx \\
 &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_0^1 x^{r-1} \left[\sum_{j=0}^{n-r} \binom{n-r}{j} (-1)^j x^j \right] dx \\
 &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_0^1 x^{r-1} (1-x)^{n-r} dx \\
 &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} B(r, n-r+1) \\
 &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \frac{(r-1)!(n-r)!}{n!} = 1.
 \end{aligned}$$

وكحالة خاصة بوضع $r = n$ فإن:

$$F_{n,n}(x) = \frac{n!}{(n-1)!} \frac{[F(t)]^n}{n} = [F(t)]^n.$$

أو يمكننا إجراء التكامل بصورة أخرى:

$$\begin{aligned}
 F_{r,n}(x) &= \int_{-\infty}^x g_r(t) dt \\
 &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_{-\infty}^x f(t) [F(t)]^{r-1} [1-F(t)]^{n-r} dt \\
 &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_{-\infty}^x f(t) [1-(1-F(t))]^{r-1} [1-F(t)]^{n-r} dt \\
 &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_{-\infty}^x f(t) [1-F(t)]^{n-r} \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j} (-1)^j [1-F(t)]^j dt \\
 &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j} (-1)^j \int_{-\infty}^x f(t) [1-F(t)]^{n-r+j} dt \\
 F_{r,n}(x) &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j} (-1)^j \left\{ \frac{1 - [1-F(x)]^{n-r+j+1}}{n-r+j+1} \right\}.
 \end{aligned}$$

وكحالة خاصة بوضع $r = 1$ في الصيغة السابقة فإن:

$$F_{ln}(x) = \frac{n!}{(n-1)!} \left\{ \frac{1 - [1 - F(x)]^n}{n} \right\} \\ = 1 - [1 - F(x)]^n.$$

الطريقة الثانية:

يمكننا إيجاد دالة التوزيع التجميعي باستخدام جداول بيتا الناقصة والتي تعرف كما يلي:

$$I_x(\alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^x t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt,$$

بما أن:

$$F_{rn}(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_{-\infty}^x f(t) [F(t)]^{r-1} [1-F(t)]^{n-r} dt.$$

وبأخذ التعويض:

$$y = F(t) \Rightarrow dy = f(t) dt$$

$$\begin{aligned} \therefore F_{rn}(x) &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_0^{F(x)} y^{r-1} (1-y)^{n-r} dy \\ &= \frac{1}{B(r, n-r+1)} \int_0^{F(x)} y^{r-1} (1-y)^{n-r} dy \\ &= I_{F(x)}(r, n-r+1). \end{aligned}$$

ومن دالة التوزيع يمكن إيجاد دالة كثافة الاحتمال بالاشتقاق كالتالي:

$$\begin{aligned} g_r(x) &= \frac{1}{B(r, n-r+1)} \frac{d}{dx} \int_0^{F(x)} y^{r-1} (1-y)^{n-r} dy \\ &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} [F(x)]^{r-1} [1-F(x)]^{n-r} f(x), \quad a < x < b. \end{aligned}$$

مثال (١-٤-١):

ليكن $X \sim U(0,1)$ عندها فإن $F_{rn}(x)$ يمكن إيجادها كما يلي:

$$\begin{aligned} F_{rn}(x) &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_0^x t^{r-1} (1-t)^{n-r} dt \\ &= \frac{1}{B(r, n-r+1)} \int_0^x t^{r-1} (1-t)^{n-r} dt \end{aligned}$$

$$= I_x(r, n - r + 1),$$

ثم نستخدم جداول بيتا الناقصة لإيجاد قيم $F_{r,n}(x)$.

الطريقة الثالثة:

يمكن إيجاد $F_{r,n}(x)$ باستخدام العلاقة التالية بين دالة بيتا الناقصة ومجموع ذي الحدين:

$$I_x(r, n - r + 1) = \sum_{j=r}^n \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j}.$$

وسوف نبرهن العلاقة السابقة كالتالي:

البرهان:

$$\begin{aligned} I_x(r, n - r + 1) &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_0^x t^{r-1} (1-t)^{n-r} dt \\ &= \int_0^x n \binom{n-1}{r-1} t^{r-1} (1-t)^{n-r} dt. \end{aligned}$$

سنكامل بالتجزئ $n-r$ من المرات حيث:

$$u = (1-t)^{n-r}, \quad dv = t^{r-1} dt,$$

$$du = -(n-r)(1-t)^{n-r-1} dt, \quad v = \frac{1}{r} t^r,$$

$$\begin{aligned} I_x(r, n - r + 1) &= \frac{n}{r} \binom{n-1}{r-1} x^r (1-x)^{n-r} + \frac{n-r}{r} \int_0^x n \binom{n-1}{r-1} t^r (1-t)^{n-r-1} dt \\ &= \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} + \int_0^x n \binom{n-1}{r} t^r (1-t)^{n-r-1} dt \\ &= \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} + \binom{n}{r+1} x^{r+1} (1-x)^{n-r-1} \\ &\quad + \int_0^x n \binom{n-1}{r+1} t^{r+1} (1-t)^{n-r-2} dt \\ &= \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} + \binom{n}{r+1} x^{r+1} (1-x)^{n-r-1} + \dots \\ &\quad + \binom{n}{n-1} x^{n-1} (1-x) + \int_0^x n \binom{n-1}{n-1} t^{n-1} (1-t)^0 dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} + \binom{n}{r+1} x^{r+1} (1-x)^{n-r-1} + \dots \\
 &+ \binom{n}{n-1} x^{n-1} (1-x) + x^n \\
 &= \sum_{j=r}^n \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j}.
 \end{aligned}$$

ومن العلاقة السابقة فإن:

$$\begin{aligned}
 F_{r,n}(x) &= I_{F(x)}(r, n-r+1) \\
 &= \sum_{j=r}^n \binom{n}{j} [F(x)]^j [1-F(x)]^{n-j}.
 \end{aligned}$$

أو يمكن كتابتها على الصورة :

$$F_{r,n}(x) = \sum_{j=0}^{n-r} \binom{n}{r+j} [F(x)]^{r+j} [1-F(x)]^{n-r-j}.$$

مثال (١-٤-٢):

لتكن X_1, X_2, \dots, X_n عينة عشوائية من توزيع له دالة كثافة الاحتمال:

$$f(x) = \begin{cases} v x^{v-1}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{e.w.} \end{cases}$$

ودالة التوزيع $F(x) = x^v, 0 < x < 1$ أوجد دالة التوزيع التجميعي للإحصاء Y_r .

الحل :

$$\begin{aligned}
 F_{r,n}(x) &= \sum_{j=r}^n \binom{n}{j} [F(x)]^j [1-F(x)]^{n-j} \\
 &= \sum_{j=r}^n \binom{n}{j} (x^v)^j (1-x^v)^{n-j} \\
 &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_0^{x^v} t^{r-1} (1-t)^{n-r} dt.
 \end{aligned}$$

ومنها يمكن إيجاد دالة كثافة الاحتمال للإحصاء Y_r كالتالي:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} F_{r,n}(x) &= g_r(x) \\
 &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} v x^{v-1} (x^v)^{r-1} (1-x^v)^{n-r}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} v x^{r-1} (1-x^v)^{n-r}, \quad 0 < x < 1.$$

وبشكل عام إذا كانت لدينا X_1, X_2, \dots, X_n عينة عشوائية من توزيع متصل فإنه يمكن اشتقاق $F_{r:n}(x)$ للحصول على $g_r(x)$ كما يلي:

$$\begin{aligned} g_r(x) &= \frac{d}{dx} F_{r:n}(x) \\ &= \frac{d}{dx} \left\{ \sum_{j=r}^n \binom{n}{j} [F(x)]^j [1-F(x)]^{n-j} \right\} \\ &= n f(x) [F(x)]^{n-1} + \sum_{j=r}^{n-1} \binom{n}{j} j [F(x)]^{j-1} [1-F(x)]^{n-j} f(x) \\ &\quad - \sum_{j=r}^{n-1} \binom{n}{j} (n-j) [F(x)]^j [1-F(x)]^{n-j-1} f(x). \end{aligned}$$

وحيث إن:

$$\binom{n}{j} j = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!},$$

$$\binom{n}{j} (n-j) = \frac{n!}{(j)!(n-j-1)!}.$$

لاحظ إن حدود المجاميع ستلاشى مع بعض ما عدا عند $j=r$ في المجموع الأول وعند $j=n-1$ في المجموع الثاني وعلى ذلك:

$$\begin{aligned} g_r(x) &= n f(x) [F(x)]^{n-1} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} [F(x)]^{r-1} [1-F(x)]^{n-r} f(x) \\ &\quad - \frac{n!}{(n-1)!(0)!} [F(x)]^{n-1} f(x) \\ &= n f(x) [F(x)]^{n-1} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} [F(x)]^{r-1} [1-F(x)]^{n-r} f(x) \\ &\quad - n f(x) [F(x)]^{n-1} \\ &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} [F(x)]^{r-1} [1-F(x)]^{n-r} f(x). \end{aligned}$$

الطريقة الرابعة:

$$\begin{aligned} F_{r:n}(x) &= P(Y_r \leq x) \\ &= \sum_{j=r}^n \binom{n}{j} [F(x)]^j [1-F(x)]^{n-j} \end{aligned}$$

البرهان:

ليكن x ثابت، نعرف:

$$\begin{aligned} Z_i &= 0, \quad \text{if } X_i > x \\ &= 1, \quad \text{if } X_i \leq x. \end{aligned}$$

عندها فإن عدد المتغيرات التي تحقق الشرط $X_i \leq x$ هو $W = \sum_{i=1}^n Z_i$ ، حيث W متغير

عشوائي يتبع توزيع ذي الحدين بالمعالم $n, F(x)$ والآن:

$$\begin{aligned} F_{r:n}(x) &= P(Y_r \leq x) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^n Z_i \geq r\right) \\ &= P(W \geq r) \\ &= \sum_{j=r}^n \binom{n}{j} [F(x)]^j [1-F(x)]^{n-j}. \end{aligned}$$

استندنا في البرهان السابق على المساواة بين الحادثتين $Y_r \leq x$ و $\sum_{i=1}^n Z_i \geq r$ ، لأنه عندما يكون

الإحصاء الترتيبي ذو الرتبة r أقل من أو يساوي x فإنه من المؤكد أن عدد X_i أقل من أو يساوي x أكبر من أو يساوي r أي أن $\sum_{i=1}^n Z_i \geq r$. ويلاحظ إنه في البرهان لم نشترط أن يكون التوزيع متصلاً لذا فالصيغة تصلح للمتقطع أيضاً.

وكحالة خاصة عندما $r = n$ فإن:

$$\begin{aligned} F_{n:n}(x) &= \sum_{j=n}^n \binom{n}{j} [F(x)]^j [1-F(x)]^{n-j} \\ &= \binom{n}{n} [F(x)]^n [1-F(x)]^{n-n} \\ &= [F(x)]^n. \end{aligned}$$

وعندما $r = 1$ فإن:

$$\begin{aligned} F_{1:n}(x) &= \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} [F(x)]^j [1-F(x)]^{n-j} \\ &= 1 - \binom{n}{0} [F(x)]^0 [1-F(x)]^{n-0} \\ &= 1 - [1-F(x)]^n. \end{aligned}$$

مثال (١-٤-٣):

لتكن $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_5$ الإحصاءات الترتيبية لعينة عشوائية من الحجم $n = 5$ مسحوبة من توزيع له دالة كثافة احتمال :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , 0 < x < 1, \\ 0 & , \text{e.w.} \end{cases}$$

احسب $P(Y_4 < \frac{1}{2})$.

الحل:

$$P(X < \frac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} 2x \, dx = \frac{1}{4},$$

$$\begin{aligned} P(Y_4 < \frac{1}{2}) &= \sum_{j=4}^5 \binom{5}{j} [F(\frac{1}{2})]^j [1 - F(\frac{1}{2})]^{5-j} \\ &= \binom{5}{4} \left[\frac{1}{4}\right]^4 \left[\frac{3}{4}\right] + \binom{5}{5} \left[\frac{1}{4}\right]^5 \left[\frac{3}{4}\right]^0 \\ &= \frac{16}{45} = 0.0156. \end{aligned}$$

مثال (١-٤-٤):

لتكن X_1, X_2, \dots, X_n متغيرات عشوائية مستقلة وتبع التوزيع الهندسي بدالة كثافة الاحتمال:

$$f(x) = (1-p)^{x-1} p, \quad x = 1, 2, 3, \dots$$

ودالة التوزيع التجميعي:

$$F(x) = \sum_{w=1}^x (1-p)^{w-1} p$$

$$= p \sum_{w=0}^{x-1} (1-p)^w.$$

باستخدام مجموع المتسلسلة الهندسية $\sum_{i=0}^k a^i = \frac{1-a^{k+1}}{1-a}$ فإن:

$$\begin{aligned} F(x) &= p \frac{1-(1-p)^x}{1-(1-p)} \\ &= 1 - (1-p)^x. \end{aligned}$$

وهذا عندما x عدد صحيح موجب وحيث إن $F(x)$ ثابتة بين الأعداد الصحيحة الموجبة فإن

$$F(x) = 1 - (1-p)^{[x]}, \quad x \geq 1$$

$$= 0, \quad x < 1,$$

حيث $[x]$ هو أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x ومنه يمكن إيجاد دالة التوزيع التجميعي للإحصاء Y_r كالتالي:

$$F_{r:n}(x) = \sum_{j=r}^n \binom{n}{j} [F(x)]^j [1-F(x)]^{n-j}$$

$$= \sum_{j=r}^n \binom{n}{j} [1 - (1-p)^{[x]}]^j [(1-p)^{[x]}]^{n-j}.$$

وكحالة خاصة عندما $r = 1$ فإن:

$$F_{1:n}(x) = 1 - \binom{n}{0} [1 - (1-p)^{[x]}]^0 [(1-p)^{[x]}]^{n-0}$$

$$= 1 - (1-p)^{n[x]}.$$

مثال (١-٤-٥):

لتكن $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_7$ الإحصاءات الترتيبية لعينة عشوائية من الحجم $n = 7$ مسحوبة من توزيع له دالة كثافة احتمال:

$$f(x) = \begin{cases} 3(1-x)^2, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{e.w.} \end{cases}$$

احسب $P(Y_4 < 1 - \sqrt[3]{6})$.
الحل:

$$P(X < 1 - \sqrt[3]{6}) = \int_0^{1-\sqrt[3]{6}} 3(1-x)^2 dx$$

$$= - (1-x)^3 \Big|_0^{1-\sqrt[3]{6}} = .4.$$

$$P(Y_4 < 1 - \sqrt[3]{6}) = \sum_{j=4}^7 \binom{7}{j} (.4)^j (.6)^{7-j}.$$

$$= 1.000 - 0.7102 = 0.2898.$$

حيث تم حسابها من جدول توزيع ذات الحدين في ملحق (١)
في المثال السابق كان من السهل إيجاد النتيجة من الجداول والسؤال الآن إذا كان حجم العينة كبير جداً كيف يمكننا حساب الاحتمال؟ بالطبع بما إن الاحتمال يتبع ذات الحدين فيمكننا تقريبه إلى التوزيع الطبيعي بشرط أن تكون n كبيرة والمثال التالي يوضح الفكرة.

مثال (١-٤-٦):

لتكن $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_{100}$ الإحصاءات الترتيبية لعينة عشوائية من الحجم $n = 100$ مسحوبة من توزيع له الوسيط $m = 68.1$ (أي أن $P(X < 68.1) = \frac{1}{2}$) ما هو احتمال أن الإحصاء الترتيبي من الرتبة 55 (Y_{55}) أقل من أو يساوي 68.1.

الحل:

$$\begin{aligned} P(Y_{55} < 68.1) &= \sum_{j=55}^{100} \binom{100}{j} (.5)^j (.5)^{100-j} \\ &= 1 - \sum_{j=0}^{54} \binom{100}{j} (.5)^j (.5)^{100-j} \\ &\approx 1 - \Phi\left(\frac{54.5 - 50}{5}\right) \\ &= 1 - \Phi(0.9) = 0.1841. \end{aligned}$$

حيث $\Phi(\cdot)$ دالة التوزيع التجميعي لمتغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي القياسي وقد تم حساب $\Phi(.9)$ من جداول التوزيع الطبيعي القياسي في ملحق (2) حيث:

$$\Phi(.9) = 0.5 + 0.3159 = 0.8159.$$
(١-٥) المئينات للإحصاءات الترتيبية:**(١-٥-١) التقدير للمئين من الرتبة $100p$:**

المئين من الرتبة $100p$ لدالة كثافة احتمال $f(x)$ لمتغير عشوائي X هو رقم حقيقي يقسم المساحة تحت دالة كثافة الاحتمال الى جزئين معلومتين القيمة . فقط المساحة علي يسار الرقم الحقيقي تعرف وذلك لان المساحة تحت المنحنى تساوى الواحد الصحيح. ليكن المئين من الرتبة $100p$ يرمز له بالرمز x_p لكل $0 \leq p \leq 1$. بدلالة دالة التوزيع التجميعي فإن x_p يعرف على أنه أى رقم حقيقي نحصل عليه بحل المعادلة التالية:

$$F(x_p) = p.$$

سوف نفترض هنا أن الحل الوحيد لـ x_p ، حيث $0 \leq p \leq 1$ ، نحصل عليه في حالة إذا كانت الدالة F تتزايد بإضطراد. على سبيل المثال $x_{0.5}$ هو الوسيط للتوزيع، ويستخدم كمقياس النزعة المركزية.

لتقدير المئين من الرتبة $100p$ نحتاج الى النظرية التالية:

نظرية (١-٥-١): (نظرية التحويل التكاملي)

ليكن X متغير عشوائي له دالة التوزيع التجميعي $F(x)$. إذا كانت F متصلة فإن المتغير العشوائي $Y = F(X)$ له توزيع منتظم قياسي على الفترة $(0,1)$.
البرهان:

لاحظ إن الدالة $F(x)$ للتوزيع المتصل تكون متزايدة دائماً وبالتالي فإنها أحادية ولها دالة عكسية ولتكن $F^{-1}(x)$ ، ولنعتبر التحويلة $Y = F(X)$ عندها فإن:

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P[F(X) \leq y] \\ &= P[X \leq F^{-1}(y)] \\ &= F[F^{-1}(y)] \\ &= y, \quad 0 \leq y \leq 1. \end{aligned}$$

إذاً Y يتبع التوزيع المنتظم في الفترة $(0,1)$.

إذا ما كان لدينا عينة عشوائية X_1, X_2, \dots, X_n مسحوبة من توزيع له دالة التوزيع $F(x)$ متصلة، حينها (وبالاعتماد على النظرية السابقة) فإن $F(X_1), F(X_2), \dots, F(X_n)$ عينة عشوائية من توزيع منتظم على الفترة $(0,1)$. وبنفس الطريقة إذا كانت $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n$ الإحصاءات الترتيبية للعينة فإن $F(Y_1) < F(Y_2) < \dots < F(Y_n)$ لأن الدالة F دالة تزايدية باستمرار ولا يوجد احتمال تساوي أي قيمتين منها وبالتالي يمكن اعتبارها الإحصاءات الترتيبية للعينة $F(X_1), F(X_2), \dots, F(X_n)$ أي أن المتغيرات:

$$U_1 = F(Y_1) < U_2 = F(Y_2) < \dots < U_n = F(Y_n).$$

يمكن اعتبارها إحصاءات ترتيبية لعينة عشوائية تتبع التوزيع المنتظم بدالة كثافة احتمال:

$$g(u) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < u < 1, \\ 0 & , \quad \text{e.w.} \end{cases}$$

ودالة توزيع:

$$G(u) = \begin{cases} 0 & , \quad u < 0, \\ u & , \quad 0 < u < 1, \\ 1 & , \quad u \geq 1. \end{cases}$$

وبالتالي فإن دالة كثافة الاحتمال للإحصاء U_r هي:

$$g_r(u) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} u^{r-1} (1-u)^{n-r}, \quad 0 < u < 1.$$

أي أنه يتبع توزيع بيتا بمعامل $\alpha = r$ ، $\beta = n - r + 1$ ، ويمكن إيجاد القيمة المتوقعة للمتغير U_r كالتالي:

$$\begin{aligned} E(U_r) &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_0^1 u^r (1-u)^{n-r} du \\ &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} B(r+1, n-r+1) \\ &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \frac{r!(n-r)!}{(n+1)!} \\ \therefore E(U_r) &= \frac{r}{n+1}. \end{aligned}$$

ويمكن تفسير $U_r = F(Y_r)$ على إنها المساحة المحصورة تحت المنحنى $f(x)$ وفوق المحور X على يسار مسافة Y_r ، ويمكن اعتبارها مساحة عشوائية وتوقعها هو:

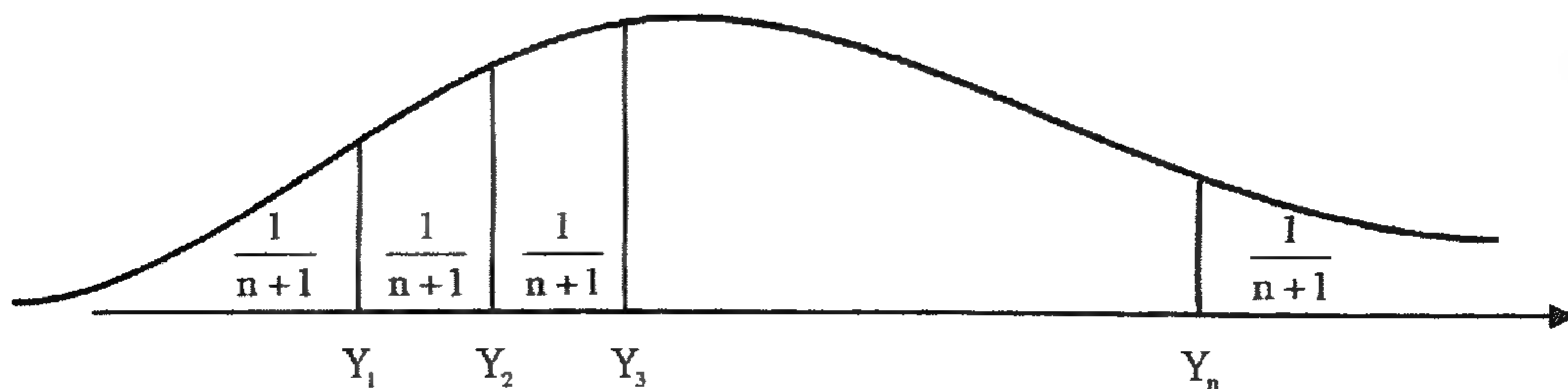
$$E(U_r) = \frac{r}{n+1}.$$

أما المساحة المحصورة بين إحصاءين متتاليين Y_{r-1}, Y_r فهي $F(Y_r) - F(Y_{r-1})$ وهي أيضاً مساحة عشوائية والقيمة المتوقعة لها هي:

$$\begin{aligned} E[F(Y_1) - 0] &= E(U_1 - 0) = E(U_1) = \frac{1}{n+1}, \\ E[F(Y_r) - F(Y_{r-1})] &= E(U_r - U_{r-1}) = E(U_r) - E(U_{r-1}) \\ &= \frac{r}{n+1} - \frac{r-1}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1}, \quad r = 2, 3, \dots, n, \end{aligned}$$

$$E[1 - F(Y_n)] = E(1 - U_n) = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

إذاً يمكن القول إن الإحصاءات الترتيبية $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n$ تقسم المساحة تحت المنحنى $f(x)$ وفوق المحور X (كما في الشكل التالي) إلى $n+1$ من المساحات وفي المتوسط فإن كل مساحة تساوي $\frac{1}{n+1}$.



وقد علمنا في ما سبق إن المساحة على يسار المئين ذو الرتبة $100p$ هي p . لذا يمكن اقتراح Y_r كتقدير للمئين X_p حيث:

$$p = \frac{r}{n+1}.$$

أي أن $r = (n+1)p$ ولكن في أغلب الأحيان لا يكون r المعطاة بالعلاقة السابقة عدد صحيح لذلك نستعمل المعدل المرجح للترتيبتان Y_r, Y_{r+1} وهو:

$$x_p = Y_r + p(Y_{r+1} - Y_r),$$

حيث r هو أكبر عدد صحيح أصغر من أو يساوي $(n+1)p$ وبشكل خاص الوسيط حيث $p = \frac{1}{2}$ هو:

$$v = \begin{cases} Y_{\frac{n+1}{2}} & \text{where } n \text{ is odd,} \\ \frac{Y_{\frac{n}{2}} + Y_{\frac{n}{2}+1}}{2} & \text{where } n \text{ is even.} \end{cases}$$

مثال (١-٥-١):

ليكن X يساوي وزن الصابون في قنينة "1000 غرام". سحبت عينة عشوائية من $n = 12$ أنتجت الأوزان التالية التي رتب كالتالي:

1013 , 1019 , 1021 , 1024 , 1026 , 1028 ,
1033 , 1035 , 1039 , 1040 , 1043 , 1047

حيث $n = 12$ عدد زوجي ، وسيط العينة هو:

$$\tilde{m} = \frac{y_6 + y_7}{2} = \frac{1028 + 1033}{2} = 1030.5.$$

أما موقع المئين ذو الرتبة 25 (أو الربع الأول) فهو:

$$(n+1)p = (12+1)(.25) = 3.25, \quad r = 3.$$

وعلى ذلك الربع الأول، باستعمال المعدل المرجح هو:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_1 &= y_3 + .25(y_4 - y_3) \\ &= .75y_3 + .25y_4 \\ &= (.75)(1021) + (.25)(1024) = 1021.75. \end{aligned}$$

بنفس الطريقة يمكن إيجاد المئين ذو الرتبة 75 بإتباع الخطوات التالية:

$$(n+1)p = (13)(.75) = 9.75, \quad r = 9,$$

$$\tilde{q}_3 = y_9 + (.75)(y_{10} - y_9)$$

$$= .25 y_9 + .75 y_{10}$$

$$= (.25)(1039) + (.75)(1040) = 1039.75.$$

بفرض أننا نرغب في إيجاد فترة ثقة للمعلمة x_p لبعض القيم من p . لتقدير مئين العينة من الرتبة p نستخدم احصائيين ترتيبيين من عينه عشوائيه مختاره من المجتمع $F(x)$ وذلك للحصول على الحد الادنى والحد الاعلى لفترة ثقة للمئين من الرتبة p . أى أننا نريد اختيار رقمين r, s حيث $r < s$ بحيث أن :

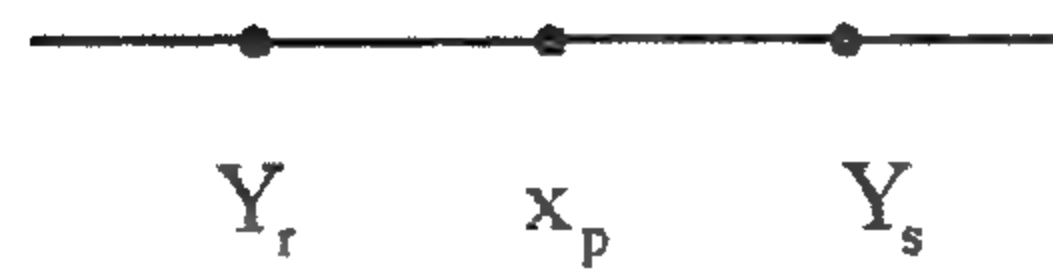
$$P(Y_r < x_p < Y_s) = 1 - \alpha$$

وذلك لبعض القيم المختارة من α حيث $0 \leq p \leq 1$.

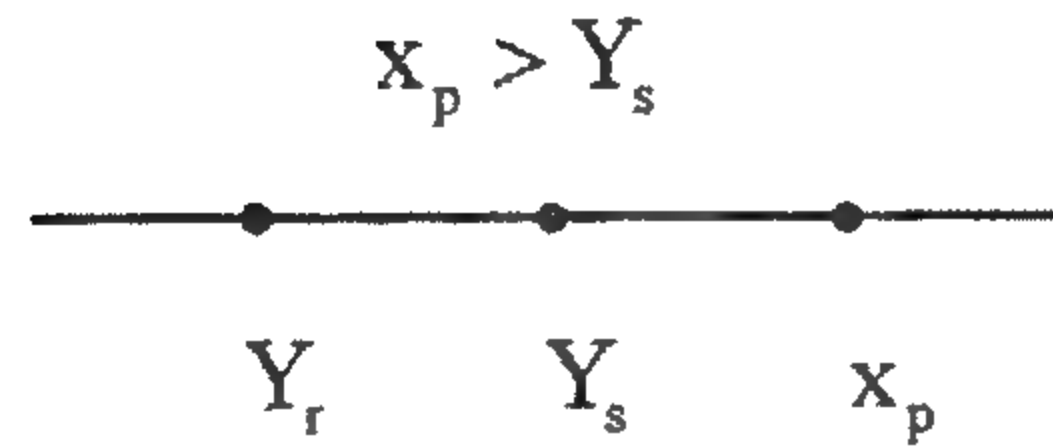
الآن الحادثة $Y_r < x_p$ تحدث إذا فقط إما.

$$Y_r < x_p < Y_s$$

أى:



أو:



والحادثتين متنافيتين .

وعلي ذلك لكل $r < s$ فإن:

$$P(Y_r < x_p) = P(Y_r < x_p < Y_s) + P(x_p > Y_s)$$

والتي تكافئ العلاقة التالية:

$$P(Y_r < x_p < Y_s) = P(Y_r < x_p) - P(Y_s < x_p).$$

وبما أن F دالة متزايدة بإضطرار فإن :

$$Y_r < x_p \Leftrightarrow F(Y_r) < F(x_p).$$

ولكن دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي $F(Y_r)$ تعتبر دالة كثافة الاحتمال للاحصاء الترتيبي من توزيع منتظم في الفترة (0, 1) كما علمنا من نظرية التحويل التكاملية ، واكثر من ذلك فإن $F(x_p) = p$ وذلك من تعريف x_p . وعلى ذلك لاي احصاء ترتيبى من الرتبة r (Y_r) من أى توزيع متصل بمئين x_p نحصل على:

$$\begin{aligned} P(Y_r < x_p) &= P[F(Y_r) < p] \\ &= \int_0^p \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} u^{r-1} (1-u)^{n-r} du \\ &= \sum_{i=r}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \\ P(Y_r < x_p < Y_s) \\ &= \sum_{i=r}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} - \sum_{i=s}^n \binom{n}{i} p^i q^n \\ &= \sum_{i=r}^{s-1} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = 1 - \alpha. \end{aligned}$$

أي أننا نبحث عن عددين r, s , $r < s$ بحيث تتحقق العلاقة السابقة.
فمثلا عندما $n = 6$, $p = .25$ فإن :

$$P(Y_1 < x_p < Y_4) = \sum_{i=1}^3 \binom{6}{i} \left(\frac{1}{4}\right)^i \left(\frac{3}{4}\right)^{6-i} \approx .78,$$

يمكن بسهولة تكوين فترة ثقة للوسيط $x_{0.5}$ باستخدام توزيع ثنائي الحدين. فإذا كانت X_1, X_2, \dots, X_n عينة عشوائية من أى مجتمع وسيطه $x_{0.5}$ وكانت $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n$ هى الاحصاءات الترتيبية و $p = \frac{1}{2}$ لهذه العينة. فإننا نبحث عن عددين r, s , $r < s$ بحيث

$$P(Y_r < x_{0.5} < Y_s) = 1 - \alpha$$

وبذلك تكون Y_s, Y_r هى فترة الثقة و $(1 - \alpha)$ هى درجة الثقة ، ويمكن الحصول

عليها كالتالى:

$$\begin{aligned}
 P(Y_r < x_{0.5} < Y_s) &= \sum_{i=r}^{s-1} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\
 &= \sum_{i=r}^{s-1} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-i} \\
 &= \sum_{i=r}^{s-1} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+n-i} \\
 &= \sum_{i=r}^{s-1} \binom{n}{i} \frac{1}{2}^n = 1 - \alpha.
 \end{aligned}$$

وهذه المعادلة تعطينا فترة ثقة للوسيط $x_{0.5}$ حيث $p = .5$.

مثال (٢-٥-١):

بفرض أن $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_5$ تمثل الاحصاءات الترتيبية من عينه عشوائية من الحجم $n = 5$ وإذا كانت :

$$\begin{aligned}
 P(Y_1 < x_{0.5} < Y_5) &= \sum_{i=1}^4 \binom{5}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{5-i} \\
 &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 15/16.
 \end{aligned}$$

أى أن احتمال ان الفترة العشوائية (Y_1, Y_5) تحتوى على الوسيط $x_{0.5}$ هو $0.94 \approx 15/16$. وعلى ذلك بفرض أننا سحبنا عينه وكانت المشاهدات المرتبة هي $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_5$ فإن (Y_1, Y_5) هي 94% فترة ثقة للوسيط $x_{0.5}$.
وحيث اننا غالبا نستخدم فترات ثقة مركزية فإننا عادة نختار $s = n - r + 1$. وهذا يعنى أننا نأخذ القراءات ذات الرتبة r في القيمة من أعلى ومن اسفل وبذلك تكون قد برهنا النظرية الآتية:

نظرية (٢-٥-١):

إذا كانت $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n$ عينه مرتبة حجمها n من مجتمع $f(x)$ فإن احتمال أن تشتمل الفترة العشوائية $P(Y_r < x_{0.5} < Y_{n-r+1})$ على الوسيط هو $\sum_{i=r}^{n-r} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ وبالتالي فإذا كنا نرغب في فترة بمعامل قدره $(1 - \alpha)$ فإننا نختار الرقم r الذى يجعل :

$$\sum_{i=r}^{n-r} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 1 - \alpha.$$

مثال (١-٥-٣):

إذا كان لدينا عينة عشوائية من $n = 9$ وكانت المشاهدات هي:

32.5 , 27.6 , 29.3 , 30.1 , 15.5 , 21.7 , 22.8 , 21.2 , 19.0

وعلى ذلك المشاهدات المرتبة سوف تكون:

15.5 < 19.0 < 21.2 < 22.8 < 27.6 < 29.3 < 30.1 < 32.5

قبل سحب العينة فإننا نعلم أن :

$$\begin{aligned} P(Y_2 < x_{.5} < Y_8) \\ &= \sum_{i=2}^7 \binom{9}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{9-i} \\ &= 0.9805 - 0.0195 = 0.9610. \end{aligned}$$

وذلك من جدول ذى الحدين فى ملحق (١) وعلى ذلك فتره الثقة $(y_2 = 19, y_8 = 30.1)$ للوسيط $x_{.5}$ لها 96% معامل ثقة.

مثال (١-٥-٤):

أوجد فترة ثقة للوسيط $x_{0.5}$ إذا علم أن $n = 10$, $.95 = (1 - \alpha)$.

الحل:

$$\begin{aligned} P(Y_r < x_{0.5} < Y_{n-r+1}) \\ &= 1 - \alpha = .95 \\ &= \sum_{i=r}^{10-r} \binom{10}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = .95 \end{aligned}$$

والآن نختار r المناسبة فنجد أن:

$$(i) \quad P(Y_5 < x_{0.5} < Y_6) = \sum_{i=5}^{10-5} \binom{10}{i} \frac{1}{1024} = .25 < .95.$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad P(Y_3 < x_{0.5} < Y_8) &= \\ &= \sum_{i=3}^7 \binom{10}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \sum_{i=3}^7 \binom{10}{i} \frac{1}{1024} \\ &= .89 < .95 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (iii) \quad P(Y_2 < x_{0.5} < Y_9) &= \sum_{i=2}^8 \binom{10}{i} \frac{1}{1024} \\ &= .98 > 0.95. \end{aligned}$$

وبالتالى فإن (Y_2, Y_1) تكون 98% فترة ثقة لوسط المجتمع $X_{0.5}$.
عندما تكون n كبيرة ($n > 20$) فإنه يمكن استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع
ثنائي الحدين فى هذه الحالة نعلم أن i تتبع التوزيع الطبيعي الذى وسطه الحسابى $\frac{n}{2}$ لأن

$$\frac{n}{4} = n \frac{1}{2} \frac{1}{2} = np(1-p) \text{ وتباينه } E(i) = np = n \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$$

لتوضيح كيف أن هذا التقريب جيد سوف نحسب الاحتمال المقابل الى $n = 16$ من جدول
التوزيع الطبيعي القياسي فى ملحق (٢) وايضا نحسب الاحتمال باستخدام جدول توزيع ذى
الحدين فى ملحق (١) نجد أنهما متساويين كمايلي:

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= P(Y_5 < x_{.5} < Y_{12}) = \sum_{i=5}^{11} \binom{16}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{16-i} \\ &= P(W=5, 6, \dots, 11) \\ &= 0.9616 - 0.0384 = 0.9232. \end{aligned}$$

حيث W يتبع توزيع ذى الحدين بمعالم $n = 16$, $p = \frac{1}{2}$. باستخدام التقريب الطبيعي
فإننا نحصل على:

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= P(4.5 < W < 11.5) \\ &= P\left(\frac{4.5-8}{2} < \frac{W-8}{2} < \frac{11.5-8}{2}\right) \\ &, \mu = np = 16\left(\frac{1}{2}\right) = 8. \end{aligned}$$

حيث:

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{16\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = 2,$$

المتغير القياسي $Z = \frac{W-8}{2}$ تقريبا يتبع التوزيع الطبيعي القياسي. وعلى ذلك:

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &\approx \Phi\left(\frac{3.5}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-3.5}{2}\right) \\ &= 0.9198. \end{aligned}$$

يلاحظ أن النتيجة هنا قريبة من الاحتمال بالضبط (0.9232).
وبنفس الطريقة يمكن إيجاد فترة ثقة لاي مئين من الرتبة $100p$ ، كما يتضح من المثال التالى.

مثال (١-٥-٥):

بفرض أن عينه عشوائيه من الحجم $n = 27$ وكانت قراءتها كالتالى:

61	80	92	105	129	164
69	83	93	113	141	191
71	84	96	121	143	217
74	86	100	122	156	276
79	87	104			

وبفرض اننا نرغب فى ايجاد تقدير لمئين ذو الرتبة $(.25)100$ (ليكن $x_{.25}$) للمجتمع . بما أن $(n+1)p = 28\left(\frac{1}{4}\right) = 7$ فإن الاحصاء الترتيبى من الرتبة 7 والمسمى $y_7 = 83$ سوف يكون تقدير بنقطه للمئين من الرتبة $(.25)100$ كما ذكرنا فى الباب الاول . لايجاد فترة ثقته لـ $x_{.25}$ نتبع الآتي :

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= P(Y_4 < x_{.25} < Y_{10}) \\ &= \sum_{i=4}^9 \binom{27}{i} (.25)^i (.75)^{27-i} \\ &= P(3.5 < W < 9.5) \end{aligned}$$

حيث W يتبع توزيع ذى الحدين بمتوسط $27/4 = 6.75$ وتباين $81/16$ وعلي ذلك:

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= \Phi\left(\frac{9.5 - 6.75}{9/4}\right) - \Phi\left(\frac{3.5 - 6.75}{9/4}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{11}{9}\right) - \Phi\left(\frac{-13}{9}\right) \\ &= 0.8149. \end{aligned}$$

وذلك من جدول التوزيع الطبيعى القياسى فى ملحق (٢).

وعلي ذلك $(y_4 = 74, y_{10} = 97)$ يمكن استخدامها فى الحصول على 81.49% فترة ثقته لـ $x_{.25}$. يمكن استخدام $y_5 = 71, y_{11} = 92$ والتي تؤدي الى الحصول على معامل ثقته مختلفة.

(١-٥-٢) المئينات لبعض التوزيعات:

قبل تقديم المئينات لبعض التوزيعات الاحتمالية تحتاج الى النظريات التالية:

نظرية (٣-٥-١):

$$I_x(p, q) = 1 - I_{1-x}(q, p).$$

البرهان:

$$I_x(p, q) = \frac{1}{B(p, q)} \int_0^x t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt.$$

وبالتعويض التالي:

$$w = 1 - t \Rightarrow t = 1 - w, \quad dt = -dw.$$

فإن:

$$\begin{aligned} I_x(p, q) &= \frac{1}{B(p, q)} \int_{1-x}^1 (1-w)^{p-1} w^{q-1} dw \\ &= 1 - \frac{1}{B(p, q)} \int_0^{1-x} (1-w)^{p-1} w^{q-1} dw \\ &= 1 - \frac{1}{B(q, p)} \int_0^{1-x} w^{q-1} (1-w)^{p-1} dw \\ &= 1 - I_{1-x}(q, p). \end{aligned}$$

ولإيجاد المئين ذو الرتبة $100p$ للإحصاء الترتيبي Y_r نستخدم المعادلة:

$$F_{r:n}(x_p) = I_{F(x_p)}(r, n - r + 1) = p.$$

وكحالة خاصة عندما $r = 1$ فإن المئين ذو الرتبة $100p$ يعطى من الصيغة التالية:

$$\begin{aligned} F_{1:n}(x_p) &= 1 - [1 - F(x_p)]^n = p. \\ \Rightarrow [1 - F(x_p)]^n &= 1 - p \\ \Rightarrow 1 - F(x_p) &= (1 - p)^{\frac{1}{n}} \\ \Rightarrow F(x_p) &= 1 - (1 - p)^{\frac{1}{n}} \\ \Rightarrow x_p &= F^{-1} \left[1 - (1 - p)^{\frac{1}{n}} \right]. \end{aligned}$$

وفي الحالة الخاصة عندما $r = n$ فإن دالة التوزيع التجميعي تعطى من الصيغة التالية:

$$\begin{aligned} F_{n:n}(x_p) &= [F(x_p)]^n = p. \\ \Rightarrow x_p &= F^{-1} \left(p^{\frac{1}{n}} \right). \end{aligned}$$

نظرية (١-٥-٤):

إذا كان التوزيع متماثل حول الصفر $[f(x)]$ متماثل حول الصفر فإن المئين ذو الرتبة $100p$ للإحصاء Y_r هو نفسه المئين ذو الرتبة $100(1-p)$ للإحصاء Y_{n-r+1} ولكن بإشارة سالبة والعكس صحيح.

البرهان:

بوضع $p = 1 - \gamma$, $-y = x$ في المعادلة التالية:

$$I_{F(x)}(r, n - r + 1) = p$$

$$\therefore I_{F(-y)}(r, n - r + 1) = 1 - \gamma.$$

وحيث أن التوزيع متماثل حول الصفر فإن $F(-y) = 1 - F(y)$ وتصبح العلاقة:

$$I_{1-F(y)}(r, n - r + 1) = 1 - \gamma.$$

وباستخدام العلاقة $I_x(p, q) = 1 - I_{1-x}(q, p)$ نحصل على:

$$1 - I_{F(y)}(n - r + 1, r) = 1 - \gamma.$$

$$\therefore I_{F(y)}(n - r + 1, r) = \gamma$$

$$\therefore I_{F(-x)}(n - r + 1, r) = 1 - p.$$

أي أن $-x$ هو المئين ذو الرتبة $100(1-p)$ للإحصاء Y_{n-r+1} .

نتيجة (١-٥-١):

إذا كان التوزيع متماثل حول الصفر فإن:

$$F_{r,n}(x) + F_{n-r+1,n}(-x) = 1.$$

البرهان:

من الخاصية السابقة نستنتج إن :

$$F_{r,n}(x) = I_{F(x)}(r, n - r + 1) = p,$$

$$F_{n-r+1,n}(-x) = I_{F(-x)}(n - r + 1, r)$$

$$= I_{1-F(x)}(n - r + 1, r)$$

$$= 1 - I_{F(x)}(r, n - r + 1)$$

$$= 1 - p.$$

$$\therefore F_{r,n}(x) + F_{n-r+1,n}(-x) = 1.$$

وباشتقاق العلاقة السابقة نحصل على:

$$g_r(x) - g_{n-r+1}(-x) = 0$$

$$\Rightarrow g_r(x) = g_{n-r+1}(-x).$$

كما يمكن برهان هذه العلاقة بأسلوب آخر حيث:

$$g_{n-r+1}(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} f(x) [F(x)]^{n-r} [1-F(x)]^{r-1}$$

وبوضع $-x$ بدلاً من x نحصل على:

$$g_{n-r+1}(-x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} f(-x) [F(-x)]^{n-r} [1-F(-x)]^{r-1}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} f(x) [1-F(x)]^{n-r} [F(x)]^{r-1}$$

$$= g_r(x).$$

(أ) التوزيع الطبيعي القياسي:

لتكن X_1, X_2, \dots, X_n عينة عشوائية من توزيع طبيعي قياسي $N(0,1)$ له دالة كثافة الاحتمال:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

ودالة التوزيع:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

أوجد المئين ذو الرتبة $100p$ للإحصاء Y_r .

الحل :

$$g_r(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \phi(x) [\Phi(x)]^{r-1} [1-\Phi(x)]^{n-r},$$

$$F_{r:n}(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_{-\infty}^x \phi(t) [\Phi(t)]^{r-1} [1-\Phi(t)]^{n-r} dt$$

$$= I_{\Phi(x)}(r, n-r+1).$$

وفي الحالة الخاصة عندما $r=1$ فإن:

$$F_{1:n}(x) = 1 - [1-\Phi(x)]^n$$

ولإيجاد المئين من الرتبة $100p$ للإحصاء Y_1 نضع:

$$F_{1:n}(x) = 1 - [1-\Phi(x)]^n = p.$$

$$\Rightarrow [1-\Phi(x)]^n = 1-p$$

$$\Rightarrow 1 - \Phi(x) = (1 - p)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \Phi(x) = 1 - (1 - p)^{\frac{1}{n}}.$$

وبالتالي فيمكن الحصول على x من جداول التوزيع الطبيعي القياسي في ملحق (٢) أما المستثنى ذو الرتبة $100p$ للمتغير Y_n فيعطى بحل المعادلة التالية:

$$F_{n,n}(x) = [\Phi(x)]^n = p.$$

$$\Rightarrow \Phi(x) = p^{\frac{1}{n}}.$$

وهذا أيضاً يعطى من جداول التوزيع الطبيعي القياسي في ملحق (٢). ويمكن أيضاً إيجاد المنوال للإحصاء Y_r باشتقاق $g_r(x)$ ومساواتها بالصفر كالتالي:

$$\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \frac{d}{d\tilde{x}} \left\{ \phi(\tilde{x}) [\Phi(\tilde{x})]^{r-1} [1 - \Phi(\tilde{x})]^{n-r} \right\} = 0$$

$$\phi'(\tilde{x}) [\Phi(\tilde{x})]^{r-1} [1 - \Phi(\tilde{x})]^{n-r}$$

$$+ (r-1) \phi^2(\tilde{x}) [\Phi(\tilde{x})]^{r-2} [1 - \Phi(\tilde{x})]^{n-r}$$

$$- (n-r) \phi^2(\tilde{x}) [\Phi(\tilde{x})]^{r-1} [1 - \Phi(\tilde{x})]^{n-r-1} = 0$$

وبالقسمة على $[\Phi(\tilde{x})]^{r-2} [1 - \Phi(\tilde{x})]^{n-r-1}$ تصبح المعادلة:

$$\phi'(\tilde{x}) [\Phi(\tilde{x})] [1 - \Phi(\tilde{x})] + (r-1) \phi^2(\tilde{x}) [1 - \Phi(\tilde{x})]$$

$$- (n-r) \phi^2(\tilde{x}) [\Phi(\tilde{x})] = 0$$

وحيث إن $\phi'(\tilde{x}) = -\tilde{x} \phi(\tilde{x})$ تصبح المعادلة:

$$\tilde{x} [\Phi(\tilde{x})] [1 - \Phi(\tilde{x})] = (r-1) \phi(\tilde{x}) [1 - \Phi(\tilde{x})] - (n-r) \phi(\tilde{x}) [\Phi(\tilde{x})].$$

وبحل المعادلة السابقة نحصل على المنوال. ونجد إن العلاقة السابقة لا تتغير إذا وضعنا $-\tilde{x}$ بدلاً من \tilde{x} و $n-r+1$ بدلاً من r أي أن منوال الإحصاء Y_r يساوي منوال الإحصاء Y_{n-r+1} ولكن بإشارة سالبة. وكحالة خاصة عندما $r = n$ فإن المعادلة تصبح:

$$\tilde{x} [\Phi(\tilde{x})] = (n-1) \phi(\tilde{x}).$$

(ب) التوزيع اللوجستي:

ليكن X متغير عشوائي يتبع التوزيع اللوجستي وله دالة التوزيع التجميعي:

$$F(x) = \frac{1}{(1 + e^{-gx})}, \quad -\infty < x < \infty,$$

ودالة كثافة احتمال:

$$f(x) = \frac{ge^{-gx}}{(1+e^{-gx})^2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

وهو توزيع متمائل حول الصفر. ودالة كثافة الاحتمال للإحصاء Y_r من عينة عشوائية حجمها n هي:

$$g_r(x) = \frac{1}{B(r, n-r+1)} \frac{ge^{-gx}}{(1+e^{-gx})^2} \left[\frac{1}{(1+e^{-gx})} \right]^{r-1} \left[1 - \frac{1}{(1+e^{-gx})} \right]^{n-r}$$

$$= \frac{1}{B(r, n-r+1)} \frac{ge^{-gx(n-r+1)}}{(1+e^{-gx})^{n+1}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

بينما دالة التوزيع التجميعي تعطى من دالة بيتا الناقصة:

$$F_{r,n}(x) = I_{\frac{1}{1+e^{-gx}}}(r, n-r+1).$$

حيث:

$$F_{r,n}(x) = \frac{1}{B(r, n-r+1)} \sum_{j=0}^{n-r} \binom{n-r}{j} (-1)^j \frac{1}{(j+r)(1+e^{-gx})^{j+r}}$$

أو بطريقة أخرى كالتالي:

$$F_{r,n}(x) = \frac{1}{B(r, n-r+1)} \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j} (-1)^j \frac{1}{n-r+j+1} \left[1 - \left(\frac{e^{-gx}}{1+e^{-gx}} \right)^{n-r+j+1} \right].$$

ويمكن حساب المئين ذو الرتبة $100p$ للإحصاء Y_r من الصيغة الأولى بحل المعادلة:

$$I_{\frac{1}{1+e^{-gx}}}(r, n-r+1) = p.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+e^{-gx}} = B_p(r, n-r+1)$$

حيث $B_p(r, n-r+1)$ يمكن حسابها من جداول بيتا الناقصة.

$$\Rightarrow 1+e^{-gx} = \frac{1}{B_p(r, n-r+1)}$$

$$\Rightarrow e^{-gx} = \frac{1-B_p(r, n-r+1)}{B_p(r, n-r+1)}$$

$$\Rightarrow x_{p,r} = \frac{-1}{g} \ln \left[\frac{1-B_p(r, n-r+1)}{B_p(r, n-r+1)} \right] = \frac{1}{g} \ln \left[\frac{B_p(r, n-r+1)}{1-B_p(r, n-r+1)} \right].$$

وفي الحالة الخاصة عندما $r = n$ فإن:

$$F_{n,n}(x) = [F(x)]^n$$

$$= \left[\frac{1}{1 + e^{-gx}} \right]^n.$$

وبوضع:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{1 + e^{-gx}} \right]^n &= p. \\ \Rightarrow \frac{1}{1 + e^{-gx}} &= p^{\frac{1}{n}} \\ \Rightarrow e^{-gx} &= \frac{1 - p^{\frac{1}{n}}}{p^{\frac{1}{n}}} \\ \Rightarrow x_{p,n} &= \frac{-1}{g} \ln \left(\frac{1 - p^{\frac{1}{n}}}{p^{\frac{1}{n}}} \right) = \frac{1}{g} \ln \left[\frac{p^{\frac{1}{n}}}{1 - p^{\frac{1}{n}}} \right]. \end{aligned}$$

المئين ذو الرتبة $100(1-p)$ للإحصاء Y_1 يحسب كالتالي:

$$\begin{aligned} F_{1n}(x) &= 1 - [1 - F(x)]^n \\ &= 1 - \left[1 - \frac{1}{1 + e^{-gx}} \right]^n. \end{aligned}$$

وبوضع:

$$\begin{aligned} 1 - \left[1 - \frac{1}{1 + e^{-gx}} \right]^n &= 1 - p. \\ \Rightarrow \left[1 - \frac{1}{1 + e^{-gx}} \right]^n &= p \\ \Rightarrow 1 - \frac{1}{1 + e^{-gx}} &= p^{\frac{1}{n}} \\ \Rightarrow \frac{1}{1 + e^{-gx}} &= 1 - p^{\frac{1}{n}} \\ \Rightarrow e^{-gx} &= \frac{p^{\frac{1}{n}}}{1 - p^{\frac{1}{n}}} \\ \Rightarrow x_{1-p,1} &= -\frac{1}{g} \ln \left(\frac{p^{\frac{1}{n}}}{1 - p^{\frac{1}{n}}} \right). \end{aligned}$$

لاحظ إن:

$$-X_{1-p,1} = \frac{1}{g} \ln \left(\frac{p^{\frac{1}{n}}}{1-p^{\frac{1}{n}}} \right) = -\frac{1}{g} \ln \left(\frac{1-p^{\frac{1}{n}}}{p^{\frac{1}{n}}} \right) = X_{p,n}.$$

وهذه النتيجة حصلنا عليها لأن التوزيع متماثل حول الصفر.

(ج) التوزيع الاسي القياسي:

لتكن X_1, X_2, \dots, X_n عينة عشوائية من التوزيع الأسّي القياسي بدالة كثافة احتمال:

$$f(x) = e^{-x}, \quad 0 < x < \infty,$$

$$= 0, \quad \text{e.w.}$$

ودالة كثافة الاحتمال للإحصاء Y_r تعطى كالتالي:

$$g_r(x) = \frac{1}{B(r, n-r+1)} e^{-(n-r+1)x} (1-e^{-x})^{r-1}$$

بينما دالة التوزيع التجميعي تعطى من دالة بيتا الناقصة كالتالي:

$$F_{r,n}(x) = I_{1-e^{-x}}(r, n-r+1).$$

ويمكن حساب المئين ذو الرتبة $100p$ للإحصاء Y_r بحل المعادلة:

$$I_{1-e^{-x}}(r, n-r+1) = p.$$

$$\Rightarrow 1 - e^{-x} = B_p(r, n-r+1),$$

حيث $B_p(r, n-r+1)$ يمكن حسابها من جداول بيتا الناقصة.

$$\Rightarrow e^{-x} = 1 - B_p(r, n-r+1)$$

$$\Rightarrow x_{p,r} = -\ln[1 - B_p(r, n-r+1)] = \ln \left[\frac{1}{B(r, n-r+1)} \right].$$

وفي الحالة الخاصة عندما $r = n$ فإن:

$$F_{n,n}(x) = [F(x)]^n$$

$$= [1 - e^{-x}]^n.$$

وبوضع:

$$[1 - e^{-x}]^n = p.$$

$$\Rightarrow 1 - e^{-x} = p^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow e^{-x} = 1 - p^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow x_{p,n} = -\ln(1 - p^{\frac{1}{n}}) = \ln \left[\frac{1}{1 - p^{\frac{1}{n}}} \right].$$

أما المئين ذو الرتبة $100p$ للإحصاء Y_1 فيعطى من المعادلة:

$$1 - [e^{-x}]^n = p.$$

$$\Rightarrow [e^{-x}]^n = 1 - p$$

$$\Rightarrow e^{-x} = (1 - p)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow x_{p,1} = -\frac{1}{n} \ln(1 - p) = \ln \left[\frac{1}{(1 - p)^{\frac{1}{n}}} \right].$$

(د) التوزيع المنتظم القياسي:

لتكن X_1, X_2, \dots, X_n عينة عشوائية من التوزيع المنتظم القياسي بدالة كثافة احتمال:

$$f(x) = 1 \quad , \quad 0 < x < 1,$$

$$= 0 \quad , \quad \text{e.w.}$$

ودالة التوزيع:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0, \\ x & , \quad 0 < x < 1, \\ 1 & , \quad x \geq 1. \end{cases}$$

ودالة كثافة الاحتمال للإحصاء Y_r تعطى كالتالي:

$$g_r(x) = \frac{1}{B(r, n - r + 1)} x^{r-1} (1 - x)^{n-r}.$$

بينما دالة التوزيع التجميعي تعطى من دالة بيتا الناقصة حيث:

$$F_{r,n}(x) = I_x(r, n - r + 1).$$

ويمكن حساب المئين ذو الرتبة $100p$ للإحصاء Y_r بحل المعادلة:

$$I_x(r, n - r + 1) = p.$$

$$\Rightarrow x_{p,r} = B_p(r, n - r + 1).$$

وكحالة خاصة عندما $r = n$ فإن:

$$F_{n,n}(x) = [F(x)]^n = x^n.$$

$$x^n = p \Rightarrow x_{p,n} = p^{\frac{1}{n}}.$$

أما عندما $r = 1$ فإن:

$$\begin{aligned}
 F_{lm}(x) &= 1 - [1 - F(x)]^n = 1 - (1 - x)^n \\
 1 - (1 - x)^n &= p \\
 \Rightarrow (1 - x)^n &= 1 - p \\
 \Rightarrow 1 - x &= (1 - p)^{\frac{1}{n}} \\
 \Rightarrow x_{p,1} &= 1 - (1 - p)^{\frac{1}{n}}.
 \end{aligned}$$

(٦-١) دالة التوزيع المشتركة لإحصاءين ترتيبيين:

دالة التوزيع التجميعي المشتركة للإحصاءين Y_r, Y_s يمكن إيجادها كالتالي:

$$\begin{aligned}
 F_{r,s}(x', y') &= \int_{-\infty}^{x'} \int_x^{y'} g_{r,s}(x, y) dy dx, \quad x' < y' \\
 &= \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} \cdot \\
 &\quad \int_{-\infty}^{x'} \int_x^{y'} f(x)f(y)[F(x)]^{r-1}[F(y)-F(x)]^{s-r-1}[1-F(y)]^{n-s} dy dx.
 \end{aligned}$$

وبالتعويض التالي:

$$\begin{aligned}
 t_1 &= F(x), & t_2 &= F(y) \\
 dt_1 &= f(x)dx, & dt_2 &= f(y)dy, \\
 \therefore F_{r,s}(x', y') &= C \int_{-\infty}^{F(x')} \int_{t_1}^{F(y')} t_1^{r-1}(t_2 - t_1)^{s-r-1}(1 - t_2)^{n-s} dt_1 dt_2 \\
 C &= \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}
 \end{aligned}$$

حيث

والتكامل السابق هو دالة بيتا الثنائية الناقصة. يمكن إثبات إن:

$$F_{r,s}(x, y) = \sum_{j=s}^n \sum_{i=r}^j \frac{n!}{i!(j-i)!(n-j)!} [F(x)]^i [F(y)-F(x)]^{j-i} [1-F(y)]^{n-j}.$$

أما إذا كانت $x' > y'$ فإن:

$$\begin{aligned}
 F_{r,s}(x', y') &= \int_{-\infty}^{y'} \int_{-\infty}^y g_{r,s}(x, y) dx dy \\
 &= \int_{-\infty}^{y'} g_s(y) dy \\
 &= F_s(y').
 \end{aligned}$$

أما في حالة المتغيرات العشوائية المتقطعة وإذا كانت $f(x)$ دالة الكتلة الاحتمالية فإن:

$$g_r(x) = P(Y_r = x).$$

ويمكن إيجادها من دالة التوزيع التجميعي:

$$F_{r,n}(x) = I_{F(x)}(r, n-r+1)$$

حيث:

$$g_r(x) = I_{F(x)}(r, n-r+1) - I_{F(x-1)}(r, n-r+1)$$

وبالمثل دالة كثافة الاحتمال المشتركة:

$$g_{r,s}(x, y) = P(Y_r = x, Y_s = y)$$

$$= F_{r,s}(x, y) - F_{r,s}(x-1, y) - F_{r,s}(x, y-1) + F_{r,s}(x-1, y-1).$$

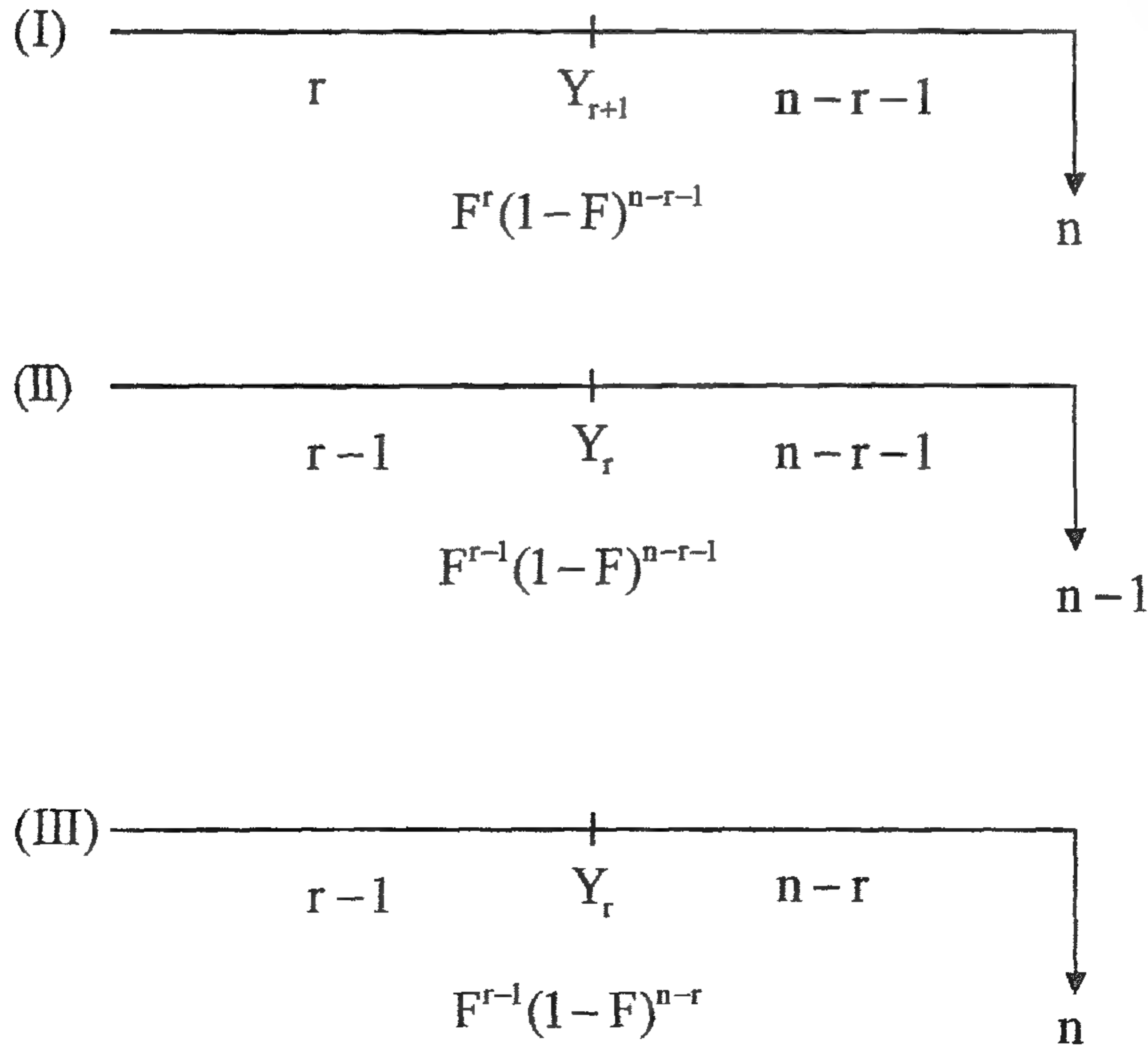
(٧-١) العلاقات التكرارية:

نظرية (١-٧-١):

$$g_{r+1,n}(x) = \frac{n}{r} g_{r,n-1}(x) - \frac{n-r}{r} g_{r,n}(x).$$

البرهان:

للتسهيل سنكتب $F = F(x), f = f(x)$



والآن سنبرهن إن (I) = (II) - (III) .

$$\begin{aligned} F^{r-1}(1-F)^{n-r-1} - F^{r-1}(1-F)^{n-r} &= F^{r-1}(1-F)^{n-r-1} [1 - (1-F)] \\ &= F^{r-1}(1-F)^{n-r-1} F \\ &= F^r(1-F)^{n-r-1}. \end{aligned}$$

وبضرب طرفي المعادلة في العامل $f \frac{n!}{r!(n-r-1)!}$ فإن:

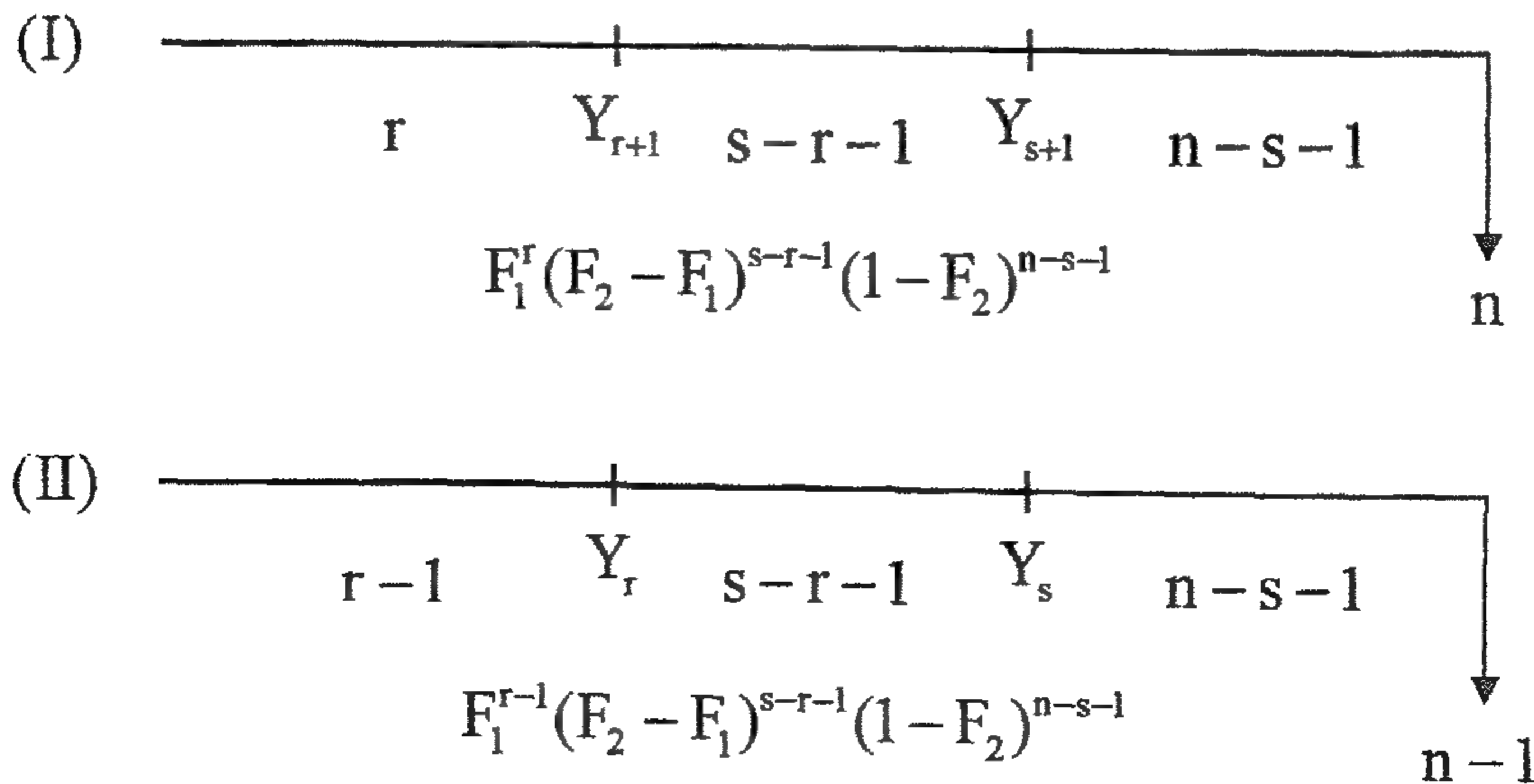
$$\begin{aligned} &\frac{n!}{r!(n-r-1)!} f F^r(1-F)^{n-r-1} \\ &= \frac{n!}{r!(n-r-1)!} f F^{r-1}(1-F)^{n-r-1} \\ &\quad - \frac{n!}{r!(n-r-1)!} f F^{r-1}(1-F)^{n-r} \\ &= \frac{n}{r} \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r-1)!} f F^{r-1}(1-F)^{n-r-1} \\ &\quad - \frac{n-r}{r} \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} f F^{r-1}(1-F)^{n-r}. \\ \therefore g_{r+1,n}(x) &= \frac{n}{r} g_{r,n-1}(x) - \frac{n-r}{r} g_{r,n}(x). \end{aligned}$$

نظرية (١-٧-٢):

$$g_{r+1,s+1,n}(x,y) = \frac{1}{r} [g_{r,s,n-1}(x,y) - (n-s)g_{r,s,n}(x,y) - (s-r)g_{r,s+1,n}(x,y)].$$

البرهان:

للتسهيل سنكتب $F_1 = F_1(x)$, $F_2 = F_2(x)$, $f_1 = f_1(x)$, $f_2 = f_2(x)$



$$(III) \quad \begin{array}{ccccccc} & & | & & | & & \\ & r-1 & Y_r & s-r-1 & Y_s & n-s & \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & n \end{array}$$

$$F_1^{r-1}(F_2 - F_1)^{s-r-1}(1 - F_2)^{n-s}$$

$$(IV) \quad \begin{array}{ccccccc} & & | & & | & & \\ & r-1 & Y_r & s-r & Y_{s+1} & n-s-1 & \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & n \end{array}$$

$$F_1^{r-1}(F_2 - F_1)^{s-r}(1 - F_2)^{n-s-1}$$

والآن سنبرهن إن (I) = (II) - (III) - (IV)

$$\begin{aligned} & F_1^{r-1}(F_2 - F_1)^{s-r-1}(1 - F_2)^{n-s-1} - F_1^{r-1}(F_2 - F_1)^{s-r-1}(1 - F_2)^{n-s} \\ & - F_1^{r-1}(F_2 - F_1)^{s-r}(1 - F_2)^{n-s-1} \\ & = F_1^{r-1}(F_2 - F_1)^{s-r-1}(1 - F_2)^{n-s-1} [1 - (1 - F_2) - (F_2 - F_1)] \\ & = F_1^{r-1}(F_2 - F_1)^{s-r-1}(1 - F_2)^{n-s-1} F_1 \\ & = F_1^r(F_2 - F_1)^{s-r-1}(1 - F_2)^{n-s-1}. \end{aligned}$$

وبضرب طرفي المعادلة في المعامل $f_1 f_2$ فإن:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s-1)!} f_1 f_2 F_1^{r-1}(F_2 - F_1)^{s-r-1}(1 - F_2)^{n-s-1} \\ & - \frac{n-s}{r} \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} f_1 f_2 F_1^{r-1}(F_2 - F_1)^{s-r-1}(1 - F_2)^{n-s} \\ & - \frac{s-r}{r} \frac{n!}{(r-1)!(s-r)!(n-s-1)!} f_1 f_2 F_1^{r-1}(F_2 - F_1)^{s-r}(1 - F_2)^{n-s-1} \\ & = \frac{n!}{r!(s-r-1)!(n-s-1)!} f_1 f_2 F_1^r(F_2 - F_1)^{s-r-1}(1 - F_2)^{n-s-1}. \end{aligned}$$

ومنها نحصل على العلاقة :

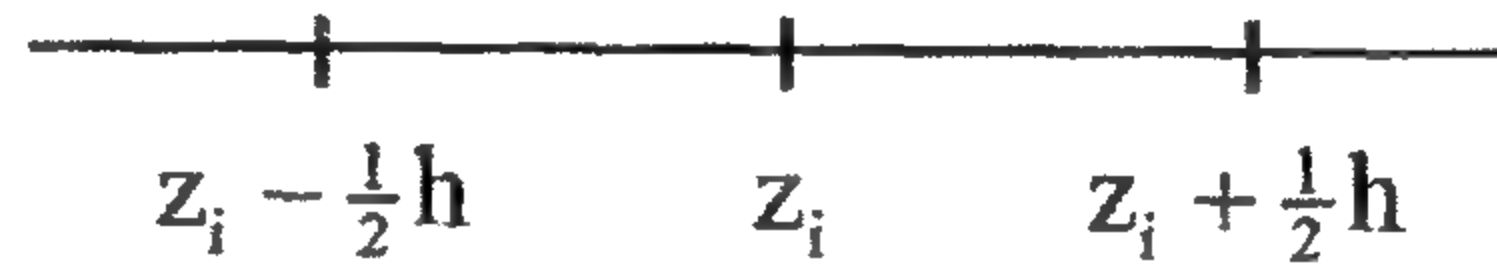
$$g_{r+1,s+1,n}(x,y) = \frac{1}{r} [g_{r,s,n-1}(x,y) - (n-s)g_{r,s,n}(x,y) - (s-r)g_{r,s+1,n}(x,y)].$$

(٨-١) التوزيعات للإحصاءات الترتيبية في العينات الموضوعة في توزيعات تكرارية The Distributions of Order Statistics in Grouped Sample

بفرض X_1, X_2, \dots, X_n المشاهدات في عينة عشوائية مختارة من مجتمع له دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ وتم ترتيبهم تصاعدياً. كما تم وضع بيانات العينة في فترات لها طول ثابت h حيث حدود الفترات (أو الفئات) هي:



بحيث يتم تغطية محور X من $-\infty$ إلى ∞ و L نقطة البداية. بفرض أن z_i مركز الفئة التي تحتوي على القيمة Y_r .



وا احتمال أن Y_r أقل أو يساوي $z_i + \frac{1}{2}h$ هو:

$$P(Y_r \leq z_i + \frac{1}{2}h) = n \binom{n-1}{r-1} \int_{-\infty}^{z_i + \frac{1}{2}h} [F(x)]^{r-1} [1-F(x)]^{n-r} f(x) dx,$$

بنفس الشكل فإن احتمال أن Y_r أقل من أو يساوي $z_i - \frac{1}{2}h$ هو:

$$P(Y_r \leq z_i - \frac{1}{2}h) = n \binom{n-1}{r-1} \int_{-\infty}^{z_i - \frac{1}{2}h} [F(x)]^{r-1} [1-F(x)]^{n-r} f(x) dx.$$

$$C = n \binom{n-1}{r-1} \text{ وليكن}$$

وعلى ذلك الفرق بين العلاقتين يعطي احتمال أن تقع Y_r في الفترة أو الفئة $(z_i - \frac{1}{2}h, z_i + \frac{1}{2}h)$ وبالمثل:

$$\begin{aligned} P(Y_r = z_i) &= C \int_{F(z_i - \frac{1}{2}h)}^{F(z_i + \frac{1}{2}h)} t^{r-1} (1-t)^{n-r} dt \\ &= I_{F(z_i + \frac{1}{2}h)}(r, n-r+1) - I_{F(z_i - \frac{1}{2}h)}(r, n-r+1). \end{aligned}$$

حيث $I_x(p, q)$ هي دالة بيتا الناقصة. ويمكن كتابتها كالتالي:

$$\begin{aligned} P(Y_r = z_i) &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \sum_{j=0}^{n-r} \binom{n-r}{j} (-1)^j \frac{1}{r+j} \\ &\quad \left\{ [F(z_i + \frac{1}{2}h)]^{j+r} - [F(z_i - \frac{1}{2}h)]^{j+r} \right\}. \end{aligned}$$

أو:

$$P(Y_r = z_i) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j} (-1)^j \frac{1}{n-r+j+1} \left\{ \left[1 - F(z_i - \frac{1}{2}h) \right]^{n-r+j+1} - \left[1 - F(z_i + \frac{1}{2}h) \right]^{n-r+j+1} \right\}.$$

وكحالة خاصة عندما $r=1$ فإن:

$$\begin{aligned} P(Y_1 = z_i) &= n \int_{z_i - \frac{1}{2}h}^{z_i + \frac{1}{2}h} [1 - F(x)]^{n-1} f(x) dx \\ &= - \frac{n [1 - F(x)]^n}{n} \Big|_{z_i - \frac{1}{2}h}^{z_i + \frac{1}{2}h} \\ &= [1 - F(z_i - \frac{1}{2}h)]^n - [1 - F(z_i + \frac{1}{2}h)]^n. \end{aligned}$$

ودالة التوزيع تعطى كالتالي:

$$\begin{aligned} P(Y_1 \leq z_i) &= n \int_{-\infty}^{z_i + \frac{1}{2}h} [1 - F(x)]^{n-1} f(x) dx \\ &= - \frac{n [1 - F(x)]^n}{n} \Big|_{-\infty}^{z_i + \frac{1}{2}h} \\ &= - \left\{ [1 - F(z_i + \frac{1}{2}h)]^n - [1 - F(-\infty)]^n \right\} \\ &= 1 - [1 - F(z_i + \frac{1}{2}h)]^n. \end{aligned}$$

وعندما $r=n$ فإن:

$$\begin{aligned} P(Y_n = z_i) &= n \int_{z_i - \frac{1}{2}h}^{z_i + \frac{1}{2}h} [F(x)]^{n-1} f(x) dx \\ &= \frac{n [F(x)]^n}{n} \Big|_{z_i - \frac{1}{2}h}^{z_i + \frac{1}{2}h} \\ &= [F(z_i + \frac{1}{2}h)]^n - [F(z_i - \frac{1}{2}h)]^n. \\ P(Y_n \leq z_i) &= n \int_{-\infty}^{z_i + \frac{1}{2}h} [F(x)]^{n-1} f(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{n[F(x)]^n}{n} \Big|_{-\infty}^{z_i + \frac{1}{2}h} \\
 &= [F(z_i + \frac{1}{2}h)]^n - [F(-\infty)]^n \\
 &= [F(z_i + \frac{1}{2}h)]^n.
 \end{aligned}$$

نظرية (١-٨-١):

عندما تكون دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ متماثلة حول الصفر فإن:

$$P(Y_r = -z_i) = P(Y_{n-r+1} = z_i).$$

البرهان:

$$\begin{aligned}
 P(Y_r = -z_i) &= I_{F(-z_i + \frac{1}{2}h)}(r, n-r+1) - I_{F(-z_i - \frac{1}{2}h)}(r, n-r+1) \\
 &= \left[1 - I_{1-F(-z_i + \frac{1}{2}h)}(n-r+1, r) \right] - \left[1 - I_{1-F(-z_i - \frac{1}{2}h)}(n-r+1, r) \right] \\
 &= I_{1-F(-z_i - \frac{1}{2}h)}(n-r+1, r) - I_{1-F(-z_i + \frac{1}{2}h)}(n-r+1, r) \\
 &= I_{F(z_i + \frac{1}{2}h)}(n-r+1, r) - I_{F(z_i - \frac{1}{2}h)}(n-r+1, r) \\
 &= P(Y_{n-r+1} = z_i).
 \end{aligned}$$

وعلى ذلك دالة كثافة الاحتمال Y_{n-r+1} هي نفسها دالة كثافة الاحتمال Y_r .

ويمكن إيجاد دالة كثافة الاحتمال المشتركة لترتيبين إحصائيين للعينات المبوبة بنفس الطريقة كالتالي:

$$P(Y_r = z_i, Y_s = z_j) = P(z_i - \frac{1}{2}h < Y_r < z_i + \frac{1}{2}h, z_j - \frac{1}{2}h < Y_s < z_j + \frac{1}{2}h)$$

وحيث إن:

$$\begin{aligned}
 g_{r,s}(x, y) &= \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} f(x) f(y) \\
 &\quad [F(x)]^{r-1} [F(y) - F(x)]^{s-r-1} [1 - F(y)]^{n-s}.
 \end{aligned}$$

$$\text{ولیکن : } C = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} \text{ فإن}$$

$$\begin{aligned}
 P(Y_r = z_i, Y_s = z_j) &= C \int_{z_i - \frac{1}{2}h}^{z_i + \frac{1}{2}h} \int_{z_j - \frac{1}{2}h}^{z_j + \frac{1}{2}h} f(x) f(y) \\
 &\quad [F(x)]^{r-1} [F(y) - F(x)]^{s-r-1} [1 - F(y)]^{n-s} dy dx.
 \end{aligned}$$

ولتكن :

: فإن $w_1 = F(x)$, $w_2 = F(y) \Rightarrow dw_1 = f(x)dx$, $dw_2 = f(y)dy$

x	w ₁	y	w ₂
$z_i - \frac{1}{2}h$	$F(z_i - \frac{1}{2}h) = h_1$	$z_j - \frac{1}{2}h$	$F(z_j - \frac{1}{2}h) = h_3$
$z_i + \frac{1}{2}h$	$F(z_i + \frac{1}{2}h) = h_2$	$z_j + \frac{1}{2}h$	$F(z_j + \frac{1}{2}h) = h_4$

وبالتعويض في التكامل فإن :

$$P(Y_r = z_i, Y_s = z_j) = C \int_{h_1}^{h_2} \int_{h_3}^{h_4} w_1^{r-1} (w_2 - w_1)^{s-r-1} (1 - w_2)^{n-s} dw_2 dw_1.$$

وكحالة خاصة عندما $(r=1, s=n)$ فإن :

$$\begin{aligned} P(Y_1 = z_i, Y_n = z_j) &= n(n-1) \int_{h_1}^{h_2} \int_{h_3}^{h_4} (w_2 - w_1)^{n-2} dw_2 dw_1 \\ &= n \int_{h_1}^{h_2} (w_2 - w_1)^{n-1} \Big|_{h_3}^{h_4} dw_1 \\ &= n \int_{h_1}^{h_2} \left[(h_4 - w_1)^{n-1} - (h_3 - w_1)^{n-1} \right] dw_1 \\ &= - \left[(h_4 - h_2)^n - (h_3 - h_2)^n \right] + \left[(h_4 - h_1)^n - (h_3 - h_1)^n \right] \\ &= (h_4 - h_1)^n - (h_4 - h_2)^n + (h_3 - h_2)^n - (h_3 - h_1)^n. \end{aligned}$$

(٩-١) أمثلة:

مثال (٩-١-١):

لتكن $Y_1 < Y_2 < Y_3 < Y_4$ الإحصاءات الترتيبية لعينة عشوائية من الحجم $n=4$ مسحوبة من توزيع له دالة كثافة الاحتمال:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x}, \quad 0 < x < \infty, \\ &= 0, \quad \text{e.w.} \end{aligned}$$

أوجد $P(Y_4 \geq 3)$.

الحل :

نبدأ بإيجاد دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y_4 كالتالي:

$$F(x) = 1 - e^{-x}, \quad x > 0,$$

$$= 0, \quad x \leq 0.$$

$$\therefore g_r(y_r) = \frac{n!}{(n-r)!(r-1)!} f(y_r) [F(y_r)]^{r-1} [1-F(y_r)]^{n-r}.$$

بوضع $n = 4, r = 4$ في الصيغة السابقة:

$$\begin{aligned} \therefore g_4(y_4) &= \frac{4!}{3!} f(y_4) [F(y_4)]^3 \\ &= 4 (e^{-y_4}) (1 - e^{-y_4})^3, \quad 0 < y_4 < \infty, \\ &= 0, \quad \text{e.w.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(Y_4 \geq 3) &= 1 - P(Y_4 < 3) \\ &= 1 - \int_0^3 4e^{-y} (1 - e^{-y})^3 dy \\ &= 1 - 4 \left. \frac{(1 - e^{-y})^4}{4} \right|_0^3 \\ &= 1 - \left[(1 - e^{-3})^4 - (1 - 1)^4 \right] \\ &= 1 - (1 - e^{-3})^4 = 0.1847. \end{aligned}$$

حل آخر:

يمكن استخدام دالة التوزيع التجميعي للإحصاء الترتيبي Y_4 في إيجاد $P(Y_4 \geq 3)$ كالتالي:

$$F_{4:4}(y_4) = \int_0^{y_4} g_4(y) dy = \int_0^{y_4} 4 e^{-y} (1 - e^{-y})^3 dy$$

ليكن :

$$e^{-y} = u \Rightarrow -y = \ln u \Rightarrow y = \ln \frac{1}{u}$$

وبما أن :

$$0 < y_4 < \infty \Rightarrow 1 < u < e^{-y_4}$$

$$\therefore F_{4:4}(y_4) = \int_1^{e^{-y_4}} -4u(1-u)^3 \frac{(-du)}{u}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_1^{e^{-y_4}} 4(1-u)^3 du \\
 \therefore F_{4:4}(y_4) &= (1-u)^4 \Big|_1^{e^{-y_4}} \\
 &= (1-e^{-y_4})^4 - (1-1)^4 \\
 &= (1-e^{-y_4})^4, \quad y_4 > 0. \\
 \therefore P(Y_4 \geq 3) &= 1 - F_{4:4}(3) \\
 &= 1 - (1-e^{-3})^4 \\
 &= 0.1847.
 \end{aligned}$$

مثال (١-٩-٢):

لتكن X_1, X_2, X_3 عينة عشوائية من مجتمع يتبع توزيع متصل بدالة كثافة احتمال:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 2x, \quad 0 < x < 1, \\
 &= 0, \quad \text{e.w.}
 \end{aligned}$$

احسب احتمال أن يكون الإحصاء الترتيبي Y_1 أكبر من وسيط المجتمع v ؟
الحل:

المطلوب حساب $P(Y_1 \geq u)$ ، حيث $Y_1 < Y_2 < Y_3$ الإحصاءات الترتيبية وبما أن:

$$F(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & x < 0 \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

دالة كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبي Y_1 هي:

$$\begin{aligned}
 g_1(y_1) &= \frac{3!}{2! 0!} f(y_1) [F(y_1)]^{1-1} [1-F(y_1)]^2 \\
 &= 3(2y_1)(1-y_1^2)^2 \\
 &= 6y_1(1-y_1^2)^2, \quad 0 < y_1 < 1, \\
 &= 0, \quad \text{e.w.}
 \end{aligned}$$

والآن نحصل v على بوضع:

$$F(v) = \frac{1}{2} \Rightarrow v^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore P\left(Y_1 \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 6y(1-y^2)^2 dy$$

$$= -3 \frac{(1-y^2)^3}{3} \Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1$$

$$= -\left[(1-1)^3 - \left(1-\frac{1}{2}\right)^3\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0.125.$$

مثال (١-٩-٣):

لتكن دالة كثافة الاحتمال لتوزيع متقطع هي:

$$f(x) = \frac{1}{6}, \quad x = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

$$= 0, \quad \text{e.w.}$$

اثبت أن دالة كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبي Y_1 من عينة حجمها $n = 5$ هي:

$$g_1(y) = \left(\frac{7-y}{6}\right)^5 - \left(\frac{6-y}{6}\right)^5, \quad y = 1, 2, \dots, 6.$$

الحل:

جميع الصيغ التي برهناها سابقاً كانت للتوزيعات المتصلة لذلك لا نستطيع استخدامها بشكل مباشر. لتكن $Y_1 < Y_2 < Y_3 < Y_4 < Y_5$ الإحصاءات الترتيبية فإن:

$$F_{15}(y) = P(Y_1 \leq y)$$

$$= 1 - P(\text{Min}\{X_1, X_2, \dots, X_5\} > y)$$

$$= 1 - P(X_1 > y, X_2 > y, \dots, X_5 > y)$$

$$= 1 - [1 - F(y)][1 - F(y)] \dots [1 - F(y)]$$

$$= 1 - [1 - F(y)]^5,$$

$$F(x) = \frac{x}{6}, \quad y \leq x < y+1, \quad y = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$= 0, \quad y < 1,$$

$$= 1, \quad y \geq 6.$$

دالة التوزيع للإحصاء الترتيبي Y_1 هي:

$$\therefore F_{1.5}(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{6}\right)^5 = 1 - \left(\frac{6-x}{6}\right)^5, \quad y \leq x < y+1, \quad y = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$= 0, \quad y < 1$$

$$= 1, \quad y \geq 6.$$

دالة الكثافة الاحتمالية للإحصاء الترتيبي Y_1 هي:

$$\therefore g_r(y) = F_{1.5}(y) - F_{1.5}(y-1)$$

$$= 1 - \left(\frac{6-y}{6}\right)^5 - 1 + \left(\frac{6-y+1}{6}\right)^5$$

$$= \left(\frac{7-y}{6}\right)^5 - \left(\frac{6-y}{6}\right)^5, \quad y = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

$$= 0, \quad \text{e.w.}$$

مثال (١-٩-٤):

ليكن $Y_1 < Y_2 < Y_3 < Y_4 < Y_5$ الإحصاءات الترتيبية لعينة عشوائية حجمها $n = 5$ من توزيع متصل له دالة التوزيع التجميعي $F(x)$ حيث $F'(x) = f(x)$ موجب ومتصل لكل $a < x < b$ ، برهن بالتكامل لدالة كثافة الاحتمال المشتركة لـ $Y_1 < Y_2 < Y_3 < Y_4 < Y_5$ على y_1, y_3, y_4, y_5 أن دالة الكثافة المشتركة لـ Y_2 هي:

$$g_2(y_2) = 20F(y_2)[1 - F(y_2)]^3 f(y_2), \quad a < y_2 < b,$$

$$= 0, \quad \text{e.w.}$$

الحل:

$$g(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = 5! f(y_1) f(y_2) f(y_3) f(y_4) f(y_5),$$

$$a < y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < y_5 < b.$$

$$g_2(y_2) = \int \int \int \int g(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) dy_1 dy_3 dy_4 dy_5$$

$$= 5! f(y_2) \int_a^{y_2} f(y_1) dy_1 \int_{y_2}^b \int_{y_3}^b \int_{y_4}^b f(y_3) f(y_4) f(y_5) dy_5 dy_4 dy_3$$

$$\begin{aligned}
 &= 5! f(y_2) [F(y_2) - F(a)] \int_{y_2}^b f(y_3) f(y_4) [F(b) - F(y_4)] dy_4 dy_3 \\
 &= 5! f(y_2) F(y_2) \int_{y_2}^b f(y_3) \int_{y_3}^b f(y_4) (1 - F(y_4)) dy_4 dy_3 \\
 &= 5! f(y_2) F(y_2) \int_{y_2}^b f(y_3) \left[\frac{1 - F(y_4)}{-2} \right]_{y_3}^b dy_3 \\
 &= \frac{5!}{2} f(y_2) F(y_2) \int_{y_2}^b f(y_3) \left\{ -[1 - F(b)]^2 + [1 - F(y_3)]^2 \right\} dy_3 \\
 &= \frac{5!}{2} f(y_2) F(y_2) \int_{y_2}^b f(y_3) [1 - F(y_3)]^2 dy_3 \\
 &= \frac{5!}{2} f(y_2) F(y_2) \left[\frac{1 - F(y_3)}{-3} \right]_{y_2}^b \\
 &= \frac{5!}{2 \cdot 3} f(y_2) F(y_2) \left[[1 - F(y_2)]^3 - [1 - F(b)]^3 \right] \\
 &= \frac{5!}{2 \cdot 3} f(y_2) F(y_2) [1 - F(y_2)]^3 \\
 &= 20 f(y_2) F(y_2) [1 - F(y_2)]^3, \quad a < y_2 < b, \\
 &= 0, \quad \text{e.w.}
 \end{aligned}$$

مثال (١-٩-٥):

لتكن $Y_1 < Y_2 < Y_3 < Y_4 < Y_5$ الإحصاءات الترتيبية لعينة عشوائية حجمها $n=5$ من توزيع له دالة كثافة الاحتمال:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 3x^2, \quad 0 < x < 1, \\
 &= 0, \quad \text{e.w.}
 \end{aligned}$$

برهن أن $Z_1 = \frac{Y_2}{Y_4}, Z_2 = Y_4$ مستقلان إحصائياً.

الحل:

$$T: \quad z_1 = \frac{y_2}{y_4}, \quad z_2 = y_4$$

$$T^{-1}: \quad y_2 = z_1 z_2, \quad y_4 = z_2$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_2}{\partial z_1} & \frac{\partial y_2}{\partial z_2} \\ \frac{\partial y_4}{\partial z_1} & \frac{\partial y_4}{\partial z_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_2 & z_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = z_2,$$

$$\begin{aligned} F(x) &= x^3, & 0 \leq x \leq 1, \\ &= 0, & x < 0, \\ &= 1, & x > 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore g_{i,j}(y_i, y_j) &= \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} f(y_i) f(y_j) [F(y_i)]^{i-1} \\ &\quad [F(y_j) - F(y_i)]^{j-i-1} [1 - F(y_j)]^{n-j}, \quad 0 < y_i < y_j < 1, \end{aligned}$$

بوضع $i=2$, $j=4$ في المعادلة السابقة نحصل على:

$$\begin{aligned} g_{2,4}(y_2, y_4) &= \frac{5!}{1! 1! 1!} (3y_2^2) (3y_4^2) (y_2^3)^{2-1} (y_4^3 - y_2^3)^{4-2-1} (1 - y_4^3)^{5-4} \\ &= 1080 y_2^5 y_4^2 (y_4^3 - y_2^3) (1 - y_4^3), \quad 0 < y_2 < y_4 < 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore h(z_1, z_2) &= |J| g_{2,4}(z_1 z_2, z_2) \\ &= 1080 z_2 (z_1 z_2)^5 (z_2)^2 [z_2^3 - (z_1 z_2)^3] (1 - z_2^3) \\ &= 1080 z_1^5 z_2^{11} (1 - z_1^3) (1 - z_2^3), \quad 0 < z_1 < 1, 0 < z_2 < 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore h_1(z_1) &= \int_0^1 1080 z_1^5 z_2^{11} (1 - z_1^3) (1 - z_2^3) dz_2 \\ &= 1080 z_1^5 (1 - z_1^3) \int_0^1 z_2^{11} (1 - z_2^3) dz_2 \\ &= 1080 z_1^5 (1 - z_1^3) \left[\int_0^1 z_2^{11} dz_2 - \int_0^1 z_2^{14} dz_2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1080 z_1^5 (1 - z_1^3) \left[\frac{z_2^{12}}{12} \Big|_0^1 - \frac{z_2^{15}}{15} \Big|_0^1 \right] \\
 &= 1080 z_1^5 (1 - z_1^3) \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{15} \right) = 18 z_1^5 (1 - z_1^3), \quad 0 < z_1 < 1, \\
 &= 0, \quad \text{e.w.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_2(z_2) &= 1080 z_2^{11} (1 - z_2^3) \int_0^1 z_1^5 (1 - z_1^3) dz_1 \\
 &= 1080 z_2^{11} (1 - z_2^3) \left[\int_0^1 z_1^5 dz_1 - \int_0^1 z_1^8 dz_1 \right] \\
 &= 1080 z_2^{11} (1 - z_2^3) \left[\frac{z_1^6}{6} \Big|_0^1 - \frac{z_1^9}{9} \Big|_0^1 \right] \\
 &= 60 z_2^{11} (1 - z_2^3), \quad 0 < z_2 < 1, \\
 &= 0, \quad \text{e.w.}
 \end{aligned}$$

نجد إن:

$$h(z_1, z_2) = h_1(z_1) h_2(z_2)$$

$\therefore Z_1, Z_2$ مستقلين إحصائياً.

سؤال مثال (١-٩-٦):

أوجد احتمال أن مدى العينة العشوائية من الحجم $n = 4$ أقل من $\frac{1}{2}$ حيث العينة مسحوبة من توزيع منتظم له دالة الكثافة الاحتمالية:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 1, \quad 0 < x < 1, \\
 &= 0, \quad \text{e.w.}
 \end{aligned}$$

واوجد المتوسط والتباين لمدى العينة.

الحل:

المطلوب حساب:

$$\begin{aligned}
 &P\left(Z_1 \leq \frac{1}{2}\right), \quad Z_1 = Y_4 - Y_1 \\
 F(x) &= x, \quad 0 \leq x < 1, \\
 &= 0, \quad x < 0, \\
 &= 1, \quad x \geq 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_{1,4}(y_1, y_4) &= \frac{4!}{(1-1)!(4-1-1)!(4-4)!} (1)(1)[y_4 - y_1]^2 \\
 &= \frac{4!}{2!} (y_4 - y_1)^2 \\
 &= 12(y_4 - y_1)^2, \quad 0 \leq y_1 < y_4 \leq 1, \\
 &= 0, \quad \text{e.w.}
 \end{aligned}$$

$$T: \quad z_1 = y_4 - y_1, \quad z_2 = y_1,$$

$$T^{-1}: \quad y_1 = z_2, \quad y_4 = z_1 + z_2.$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial z_1} & \frac{\partial y_1}{\partial z_2} \\ \frac{\partial y_4}{\partial z_1} & \frac{\partial y_4}{\partial z_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\begin{aligned}
 h(z_1, z_2) &= |J| g_{1,4}(z_2, z_1 + z_2) \\
 &= 12(z_1 + z_2 - z_2)^2 \\
 &= 12z_1^2, \quad 0 < z_1 < 1, \quad 0 < z_2 < 1 - z_1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore h(z_1) &= \int_0^{1-z_1} 12z_1^2 dz_2 = 12(1-z_1)z_1^2, \quad 0 < z_1 < 1, \\
 &= 0, \quad \text{e.w.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P\left(Z_1 \leq \frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\frac{1}{2}} 12(1-z_1)z_1^2 dz_1 \\
 &= 12 \left[\int_0^{\frac{1}{2}} z_1^2 dz_1 - \int_0^{\frac{1}{2}} z_1^3 dz_1 \right] \\
 &= 12 \left[\frac{z_1^3}{3} \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{z_1^4}{4} \Big|_0^{\frac{1}{2}} \right] \\
 &= 12 \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} \right] \\
 &= \frac{5}{16}.
 \end{aligned}$$

وفيما يلي طريقة أخرى لإيجاد $P\left(Z_1 \leq \frac{1}{2}\right)$ وذلك باستخدام دالة التوزيع التجميعي للمتغير Z_1 :

$$\begin{aligned}
G(z_1) &= \int_0^{z_1} 12t^2 (1-t) dt \\
&= 12 \int_0^{z_1} (t^2 - t^3) dt \\
&= 4z_1^3 - 3z_1^4, \quad 0 < z_1 < 1 \\
&= 0, \quad z_1 < 0 \\
&= 1, \quad z_1 > 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P\left(Z_1 < \frac{1}{2}\right) &= G\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^4 \\
&= \frac{5}{16}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(Z_1) &= 12 \int_0^1 z_1^3 (1-z_1) dz_1 = 12 \left[\int_0^1 z_1^3 dz_1 - \int_0^1 z_1^4 dz_1 \right] \\
&= 12 \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right] = \frac{3}{5}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(Z_1)^2 &= 12 \int_0^1 (1-z_1) z_1^4 dz_1 = 12 \left[\int_0^1 z_1^4 dz_1 - \int_0^1 z_1^5 dz_1 \right] \\
&= 12 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) = \frac{2}{5},
\end{aligned}$$

$$\text{Var}(Z_1) = \frac{2}{5} - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}.$$

مثال (١-٩-٧):

ليكن $Y_1 < Y_2 < Y_3$ الإحصاءات الترتيبية لعينة عشوائية من $n=3$ مسحوبة من توزيع له دالة كثافة الاحتمال:

$$\begin{aligned}
F(x) &= 2x, \quad 0 < x < 1, \\
&= 0, \quad \text{e.w.}
\end{aligned}$$

برهن أن المتغيرات $Z_1 = \frac{Y_1}{Y_2}$, $Z_2 = \frac{Y_2}{Y_3}$, $Z_3 = Y_3$ مستقلة إحصائياً.

الحل:

$$T: \quad z_1 = \frac{y_1}{y_2}, \quad z_2 = \frac{y_2}{y_3}, \quad z_3 = y_3$$

$$T^{-1}: \quad y_1 = z_1 z_2 z_3, \quad y_2 = z_2 z_3, \quad y_3 = z_3.$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial z_1} & \frac{\partial y_1}{\partial z_2} & \frac{\partial y_1}{\partial z_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial z_1} & \frac{\partial y_2}{\partial z_2} & \frac{\partial y_2}{\partial z_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial z_1} & \frac{\partial y_3}{\partial z_2} & \frac{\partial y_3}{\partial z_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_2 z_3 & z_1 z_3 & z_1 z_2 \\ 0 & z_3 & z_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= z_2 z_3^2.$$

$$\begin{aligned} \therefore g(y_1, y_2, y_3) &= 3! f(y_1) f(y_2) f(y_3) \\ &= 6(2y_1)(2y_2)(2y_3) \\ &= 48 y_1 y_2 y_3, \quad 0 \leq y_1 < y_2 < y_3 \leq 1, \\ &= 0, \quad \text{e.w.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(z_1, z_2, z_3) &= |J| g(z_1 z_2 z_3, z_2 z_3, z_3) \\ &= (z_2 z_3^2) 48 (z_1 z_2 z_3) (z_2 z_3) (z_3) \\ &= 48 z_1 z_2^3 z_3^5, \quad 0 < z_i < 1, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore h_1(z_1) &= \int_0^1 \int_0^1 48 z_1 z_2^3 z_3^5 dz_2 dz_3 \\ &= 48 \frac{1}{4} \frac{1}{6} z_1, \quad 0 < z_1 < 1 \end{aligned}$$

$$\therefore h_1(z_1) = \begin{cases} 2 z_1, & 0 \leq z_1 \leq 1, \\ 0, & \text{e.w.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} h_2(z_2) &= 48 z_2^3 \int_0^1 z_1 dz_1 \int_0^1 z_3^5 dz_3 \\ &= 48 \frac{1}{2} \frac{1}{6} z_2^3 \end{aligned}$$

$$h_2(z_2) = \begin{cases} 4 z_2^3, & 0 \leq z_2 \leq 1, \\ 0, & \text{e.w.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 h_3(z_3) &= 48z_3^5 \int_0^1 z_1 dz_1 \int_0^1 z_2^3 dz_2 \\
 &= 48 z_3^5 \frac{1}{2} \frac{1}{4} \\
 &= 6 z_3^5, \quad 0 \leq z_3 \leq 1, \\
 &= 0, \quad \text{e.w.}
 \end{aligned}$$

$$\therefore h(z_1, z_2, z_3) = h_1(z_1)h_2(z_2)h_3(z_3)$$

أي أن المتغيرات Z_1, Z_2, Z_3 مستقلة.

مثال (١-٩-٨):

إذا سحبت عينة عشوائية من الحجم $n = 2$ من توزيع له دالة كثافة الاحتمال:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 2(1-x), \quad 0 < x < 1 \\
 &= 0, \quad \text{ew.}
 \end{aligned}$$

أوجد $P(2Y_1 < Y_2)$.

الحل:

$$\begin{aligned}
 g_{1,2}(y_1, y_2) &= \frac{2!}{0!0!0!} f(y_1)f(y_2)[F(y_1)]^0[F(y_2)-F(y_1)]^0[1-F(y_2)]^0 \\
 &= 2[2(1-y_1)][2(1-y_2)] \\
 &= 8(1-y_1)(1-y_2), \quad 0 < y_1 < y_2 < 1, \\
 &= 0, \quad \text{e.w.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore P(2Y_1 < Y_2) &= \int_0^1 \int_0^{\frac{y_2}{2}} 8(1-y_1)(1-y_2) dy_1 dy_2 \\
 &= -\int_0^1 8(1-y_2) \frac{(1-y_1)^2}{2} \Big|_0^{\frac{y_2}{2}} dy_2 \\
 &= -\int_0^1 4(1-y_2) \left[\left(1-\frac{y_2}{2}\right)^2 - 1 \right] dy_2 \\
 &= -\int_0^1 (1-y_2) [(2-y_2)^2 - 4] dy_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\int_0^1 (1-y_2)(y_2^2-4y_2)dy_2 \\
 &= \int_0^1 (y_2^3-5y_2^2+4y_2)dy_2 \\
 &= \left(\frac{y_2^4}{4} - \frac{5}{3}y_2^3 + \frac{4}{2}y_2^2 \right) \Big|_0^1 \\
 &= \frac{1}{4} + 2 - \frac{5}{3} = \frac{7}{12}.
 \end{aligned}$$

مثال (٩-٩-١):

إذا كان X_1, X_2, X_3, X_4 تمثل قياسات عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع له دالة كثافة احتمال:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 3x^2, \quad 0 < x < 1, \\
 &= 0, \quad \text{e.w.}
 \end{aligned}$$

أوجد:

- أ) دالة كثافة الاحتمال لأصغر قيمة من قيم هذه العينة Y_1 ثم أوجد متوسطها.
- ب) دالة كثافة الاحتمال لأكبر قيمة من قيم هذه العينة Y_4 وأوجد تباينها.
- ج) دالة كثافة الاحتمال المشتركة بين Y_2, Y_3 ومعامل الارتباط بين Y_2, Y_3 .

الحل:

$$F(x) = \int_0^x 3t^2 dt = x^3, \quad (أ)$$

$$\therefore F(x) = \begin{cases} x^3, & 0 < x < 1 \\ 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore g_1(y_1) &= 4(1-y_1^3)^3 3y_1^2 = 12y_1^2(1-y_1^3)^3, \quad 0 < y_1 < 1. \\
 &= 0, \quad \text{e.w.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E(Y_1) &= \int_0^1 12y_1^3(1-y_1^3)^3 dy_1 \\
 &= \int_0^1 12(y_1^3 - 3y_1^6 + 3y_1^9 - y_1^{12}) dy_1 \\
 &= 12 \left(\frac{y_1^4}{4} - \frac{3}{7}y_1^7 + \frac{3}{10}y_1^{10} - \frac{y_1^{13}}{13} \right) \Big|_0^1 \\
 &= 3 - \frac{36}{7} + \frac{36}{10} - \frac{12}{13} = 0.534.
 \end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned}
 g_4(y_4) &= 4(y_4^3)^3 3y_4^2 = 12y_4^{11}, \quad 0 < y_4 < 1, \\
 &= 0, \quad \text{e.w.}
 \end{aligned}$$

$$\text{Var}(Y_4) = E(Y_4^2) - [E(Y_4)]^2.$$

$$E(Y_4^2) = \int_0^1 12y_4^2 y_4^{11} dy_4 = 12 \int_0^1 y_4^{13} dy_4 = 12 \frac{y_4^{14}}{14} \Big|_0^1 = \frac{12}{14}$$

$$E(Y_4) = \int_0^1 12y_4 y_4^{11} dy_4 = 12 \int_0^1 y_4^{12} dy_4 = 12 \frac{y_4^{13}}{13} \Big|_0^1 = \frac{12}{13} = 0.923,$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{Var}(Y_4) &= 0.857 - [0.923]^2 \\
 &= 0.857 - 0.852 = 0.005.
 \end{aligned}$$

(ج)

$$\begin{aligned}
 g_{2,3}(y_2, y_3) &= \frac{4!}{1!0!1!} (3y_2^2)(3y_3^2)(y_2^3)^1 (y_3^3 - y_2^3)^0 (1 - y_3^3)^1 \\
 &= 216 y_2^5 y_3^2 (1 - y_3^3), \quad 0 < y_2 < y_3 < 1, \\
 &= 0, \quad \text{e.w.}
 \end{aligned}$$

لإيجاد ρ_{23} نتبع الآتي:

$$\rho_{23} = \frac{\sigma_{23}}{\sigma_2 \cdot \sigma_3} = \frac{E(Y_2 Y_3) - E(Y_2)E(Y_3)}{\left\{ E(Y_2^2) - [E(Y_2)]^2 \right\} \cdot \left\{ E(Y_3^2) - [E(Y_3)]^2 \right\}},$$

$$\begin{aligned}
 g_2(y_2) &= \frac{4!}{2!1!} 3y_2^2 (y_2^3)(1 - y_2^3)^2 \\
 &= 36 y_2^5 (1 - y_2^3)^2, \quad 0 < y_2 < 1, \\
 &= 0, \quad \text{e.w.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Y_2) &= \int_0^1 36y_2 y_2^5 (1-y_2^3)^2 dy_2 \\ &= 36 \int_0^1 y_2^6 (1-2y_2^3 + y_2^6) dy_2 \\ &= 36 \left[\frac{y_2^7}{7} - 2 \frac{y_2^{10}}{10} + \frac{y_2^{13}}{13} \right]_0^1 = .712, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Y_2^2) &= 36 \int_0^1 y_2^7 (1-y_2^3)^2 dy_2 \\ &= 36 \left[\frac{y_2^8}{8} - \frac{2y_2^{11}}{11} + \frac{y_2^{14}}{14} \right]_0^1 = 0.52, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_3(y_3) &= \frac{4!}{2! 1!} 3y_3^2 (y_3^3)^2 (1-y_3^3) \\ &= 36 y_3^8 (1-y_3^3) \quad , \quad 0 < y_3 < 1, \\ &= 0 \quad , \quad \text{e.w.} \end{aligned}$$

$$E(Y_3) = 36 \int_0^1 y_3^9 (1-y_3^3) dy_3 = 36 \left(\frac{y_3^{10}}{10} - \frac{y_3^{13}}{13} \right) \Big|_0^1 = .831$$

$$E(Y_3^2) = 36 \int_0^1 y_3^{10} (1-y_3^3) dy_3 = 36 \left(\frac{y_3^{11}}{11} - \frac{y_3^{14}}{14} \right) \Big|_0^1 = 0.701,$$

$$\sigma_2^2 = 0.013, \quad \sigma_2 = 0.1143,$$

$$\sigma_3^2 = 0.0104, \quad \sigma_3 = 0.1022,$$

$$\begin{aligned} E(Y_2 Y_3) &= \int_0^1 \int_0^{y_3} 216 (y_2^6 y_3^3 - y_2^6 y_3^6) dy_2 dy_3 \\ &= \frac{216}{7} \int_0^1 (y_2^7 y_3^3 - y_2^7 y_3^6) \Big|_0^{y_3} dy_3 \\ &= \frac{216}{7} \int_0^1 (y_3^{10} - y_3^{13}) dy_3 \\ &= \frac{216}{7} \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{14} \right) = 0.601, \end{aligned}$$

$$\text{Cov}(Y_2, Y_3) = \sigma_{23} = E(Y_2 Y_3) - [E(Y_2)E(Y_3)] = 0.00328,$$

$$\rho_{23} = \frac{\sigma_{23}}{\sigma_2 \sigma_3} = 0.79853.$$

مثال (١-٩-١٠):

لتكن X_1, X_2, \dots, X_5 تمثل قياسات عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع ذا توزيع أسّي قياسي أوجد مايلي:

- (أ) دالة كثافة الاحتمال لأصغر قيمة من قيم هذه العينة ثم أوجد تباينها.
 (ب) دالة كثافة الاحتمال لأكبر قيمة من قيم هذه العينة ثم أوجد متوسطها.
 (ب) دالة كثافة الاحتمال لوسيط هذه العينة ثم أوجد القيمة المتوقعة للوسيط.

الحل:

(أ)

$$f(x) = e^{-x}, \quad x \geq 0 \\ = 0, \quad \text{e.w.}$$

$$F(x) = 1 - e^{-x}, \quad x > \infty \\ = 0, \quad \text{e.w.}$$

$$\therefore g_1(y_1) = 5 e^{-y_1} (e^{-y_1})^4 = 5e^{-5y_1}, \quad y_1 \geq 0.$$

$$E(Y_1) = \int_0^{\infty} y_1 g_1(y_1) dy_1 \\ = 5 \int_0^{\infty} y_1 e^{-5y_1} dy_1 \\ = 5 \frac{\Gamma(2)}{5^2} = \frac{1}{5} = 0.2.$$

$$E(Y_1^2) = 5 \int_0^{\infty} y_1^2 e^{-5y_1} dy_1 \\ = 5 \frac{\Gamma(3)}{5^3} = \frac{2}{25}$$

$$\text{Var}(Y_1) = \frac{2}{25} - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}.$$

(ب)

$$g_5(y_5) = 5e^{-y_5} (1 - e^{-y_5})^4, \quad 0 < y_5 < \infty \\ = 0, \quad \text{e.w.}$$

$$E(Y_5) = 5 \int_0^{\infty} y_5 e^{-y_5} (1 - e^{-y_5})^4 dy_5$$

يحسب $E(Y_5)$ كتمرين.

(ج)

$$\begin{aligned} g_3(y_3) &= \frac{5!}{2! 2!} f(y_3) [F(y_3)]^2 [1 - F(y_3)]^2 \\ &= 30 e^{-3y_3} (1 - e^{-y_3})^2, \quad 0 < y_3 < \infty, \\ &= 0, \quad \text{e.w.} \end{aligned}$$

$$E(Y_3) = 30 \int_0^{\infty} y_3 e^{-3y_3} (1 - e^{-y_3})^2 dy_3.$$

يحسب $E(Y_3)$ كتمرين.

الباب الثاني

توزيعات دوال في الإحصاءات الترتيبية

عموماً من دالة كثافة الاحتمال المشتركة للإحصاءات الترتيبية وباستخدام طريقة التحويل الاعتيادية يمكن إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية لأي دالة في الإحصاءات الترتيبية ومثال على ذلك المدى ومتنصف المدى غيرها...

(٢-١) توزيع المدى:

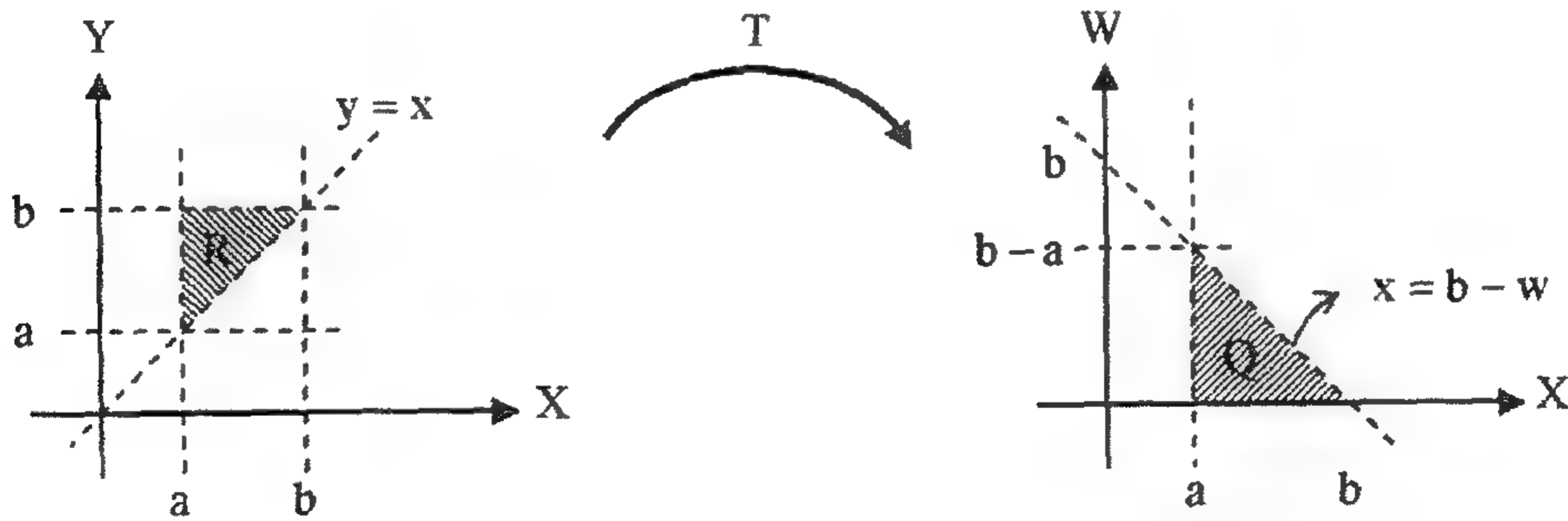
يمكن تعريف المدى بين أي إحصاءين Y_r, Y_s بأنه $W = Y_s - Y_r$ حيث $r < s$ وعندها يمكن إيجاد توزيع W باستخدام التحويل:

$$T: x = x, w = y - x$$

حيث $x = y_r, y = y_s$ والتحويلة العكسية هي:

$$T^{-1}: x = x, y = x + w,$$

ومنه يمكن حساب الجاكوبيان $J = 1$ ولاحظ إن المتغيران x, y معرفان على الفضاء $R = \{(x, y) | a \leq x < y \leq b\}$ والمثلة في الرسم ومحدودة بالمستقيمات $x = a, y = b, x = y$.
ينمنا المتغيران x, w الناتج من التحويل T معرفان على الفضاء $Q = \{(x, w) | a \leq x < x + w \leq b\}$ والمثلة بالمنطقة المحصورة بين المستقيمات $x = a, x + w = b, w = 0$.



ومن دالة كثافة الاحتمال المشتركة التالية:

$$g_{r,s}(x, y) = C f(x) f(y) [F(x)]^{r-1} [F(y) - F(x)]^{s-r-1} [1 - F(y)]^{n-s},$$

$$a \leq x < y \leq b.$$

حيث $C = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}$ ، فإن دالة كثافة الاحتمال المشتركة لـ W, Y_r هي:

$$h_{r,s}(x, w) = C f(x) f(x + w) [F(x)]^{r-1} [F(x + w) - F(x)]^{s-r-1} [1 - F(x + w)]^{n-s},$$

$$a \leq x < x + w \leq b,$$

$$= 0, \text{ e.w.}$$

أما دالة كثافة الاحتمال المطلوبة للمدى W فنحصل عليها بالتكامل على x كالتالي:

$$K_{r,s}(w) = C \int_a^{b-w} [F(x)]^{r-1} [F(x+w) - F(x)]^{s-r-1} [1 - F(x+w)]^{n-s} f(x) f(x+w) dx, \quad 0 \leq w \leq b-a,$$

$$= 0, \quad \text{e.w.}$$

وكحالة خاصة ومهمة جداً عندما $r=1, s=n$ نحصل على مدى العينة $W = Y_n - Y_1$ (الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة في العينة) ودالة كثافة الاحتمال له هي:

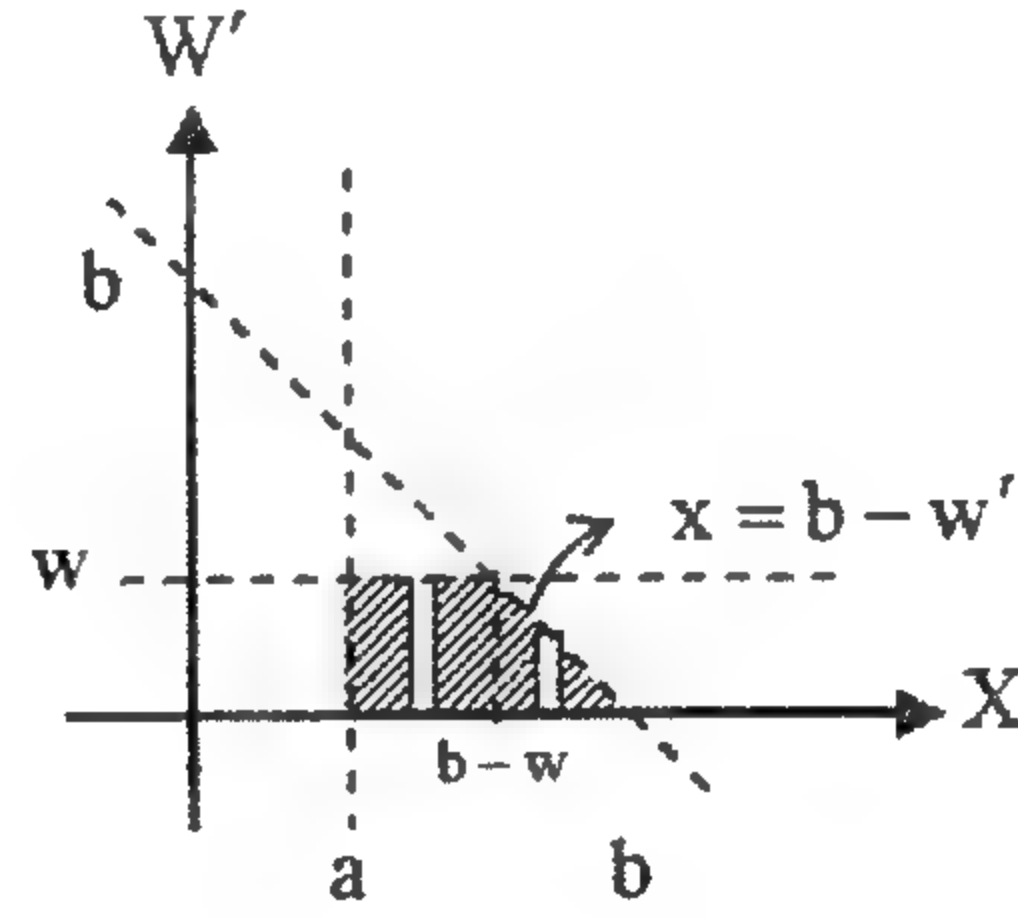
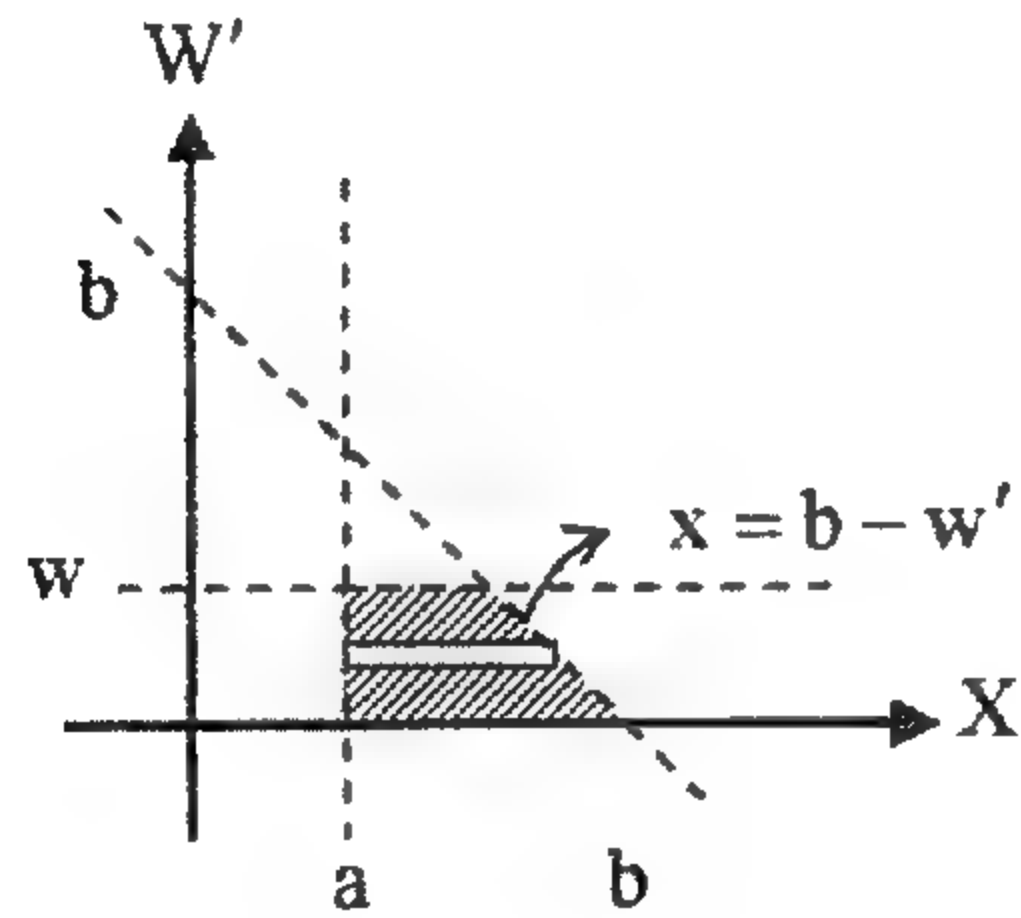
$$K_{1,n}(w) = n(n-1) \int_a^{b-w} [F(x+w) - F(x)]^{n-2} f(x) f(x+w) dx,$$

$$= 0, \quad \text{e.w.}, \quad 0 \leq w \leq b-a,$$

ومنها يمكن حساب دالة التوزيع التجميعي كالتالي:

$$F_W(w) = n(n-1) \int_0^w \int_a^{b-w'} [F(x+w') - F(x)]^{n-2} f(x) f(x+w') dx dw'.$$

والآن سنقوم بالتبديل بين التكاملين (لاحظ إن حدود التكامل الأول تعتمد على المتغير w')



$$\therefore F_W(w) = n(n-1) \int_a^{b-w} f(x) \int_0^w [F(x+w') - F(x)]^{n-2} f(x+w') dw' dx$$

$$+ n(n-1) \int_{b-w}^b f(x) \int_0^{b-x} [F(x+w') - F(x)]^{n-2} f(x+w') dw' dx$$

$$= n \int_a^{b-w} f(x) [F(x+w) - F(x)]^{n-1} \Big|_0^w dx$$

$$+ n \int_{b-w}^b f(x) [F(x+w') - F(x)]^{n-1} \Big|_0^{b-x} dx$$

$$= n \int_a^{b-w} f(x) [F(x+w) - F(x)]^{n-1} dx + n \int_{b-w}^b f(x) [F(b) - F(x)]^{n-1} dx$$

$$= n \int_a^{b-w} f(x) [F(x+w) - F(x)]^{n-1} dx + n \int_{b-w}^b f(x) [1 - F(x)]^{n-1} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= n \int_a^{b-w} f(x) [F(x+w) - F(x)]^{n-1} dx - [1 - F(x)]^n \Big|_{b-w}^b \\
 \therefore F_W(w) &= n \int_a^{b-w} f(x) [F(x+w) - F(x)]^{n-1} dx + [1 - F(b-w)]^n \\
 &\quad , \quad 0 \leq w \leq b-a, \\
 &= 0 \quad w < 0 \\
 &= 1 \quad w \geq b-a \\
 &\text{ولاحظ إنه عندما } b = \infty \text{ فإن الحد } [1 - F(b-w)]^n \text{ يتلاشى.}
 \end{aligned}$$

مثال (٢-١-١):

إذا كانت العينة العشوائية مسحوبة من توزيع منتظم $X \sim U(0,1)$ أوجد توزيع المدى $W = Y_s - Y_r$ وتوزيع المدى للعينة.
الحل:

دالة كثافة الاحتمال المشتركة للإحصاءين Y_r, Y_s هي:

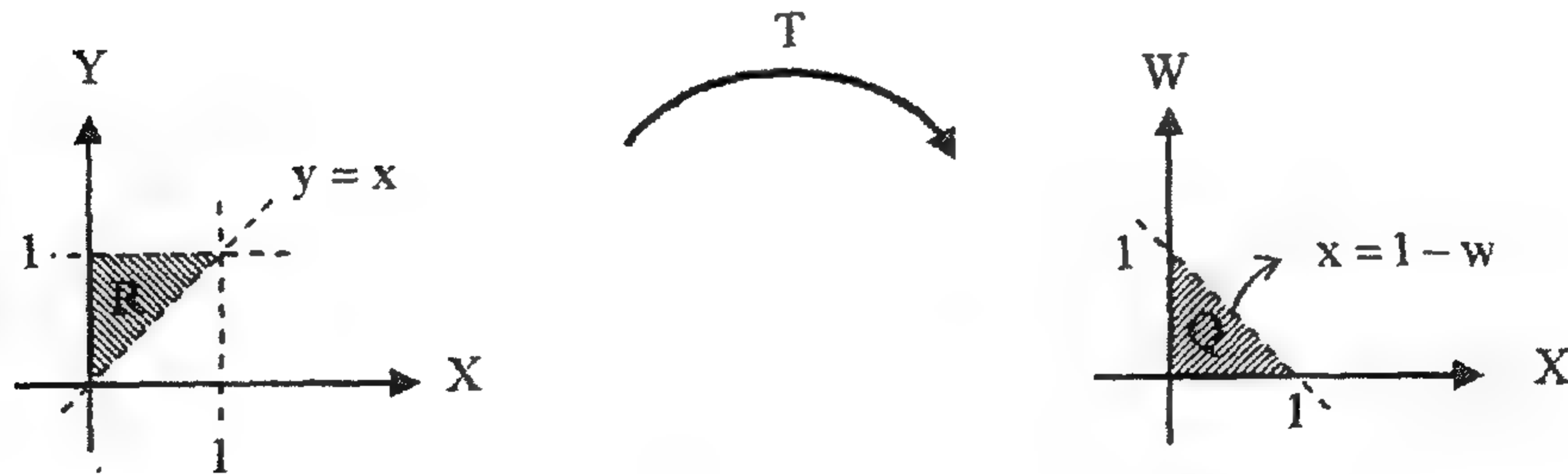
$$\begin{aligned}
 g_{r,s}(x,y) &= \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} x^{r-1} (y-x)^{s-r-1} (1-y)^{n-s} \\
 &\quad , \quad 0 \leq x < y \leq 1.
 \end{aligned}$$

ولنأخذ التحويلة:

$$T: \quad x = x, \quad w = y - x,$$

والتحويلة العكسية هي:

$$T^{-1}: \quad x = x, \quad y = x + w$$



والجوابان لهذه التحويلة $J = 1$ ، وبالتالي فإن دالة الكثافة المشتركة لـ W, Y_r هي:

$$\begin{aligned}
 h_{r,s}(x,w) &= \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} x^{r-1} w^{s-r-1} (1-w-x)^{n-s} \\
 &\quad , \quad a \leq x < x+w \leq b, \\
 &= 0 \quad , \quad \text{e.w.}
 \end{aligned}$$

توزيعات دوال في الإحصاءات الترتيبية

ومنها نوجد دالة كثافة الاحتمال للمدى W كالتالي:

$$K_{r,s}(w) = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} w^{s-r-1} \int_0^{1-w} x^{r-1} (1-w-x)^{n-s} dx.$$

ولنأخذ التعويض:

$$x = v(1-w) \Rightarrow v = \frac{x}{1-w}, \quad dx = (1-w)dv.$$

$$\begin{aligned} \therefore K_{r,s}(w) &= \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} w^{s-r-1} \int_0^1 v^{r-1} (1-w)^{r-1} (1-w-v(1-w))^{n-s} dx \\ &= \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} w^{s-r-1} (1-w)^{n-s+r} \int_0^1 v^{r-1} (1-v)^{n-s} dv \\ &= \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} w^{s-r-1} (1-w)^{n-s+r} B(r, n-s+1) \\ &= \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} \frac{(r-1)!(n-s)!}{(n-s+r)!} w^{s-r-1} (1-w)^{n-s+r} \\ &= \frac{n!}{(s-r-1)!(n-s+r)!} w^{s-r-1} (1-w)^{n-s+r} \\ &= \frac{w^{s-r-1} (1-w)^{n-s+r}}{B(s-r, n-s+r+1)}, \quad 0 \leq w \leq 1, \\ &= 0, \quad \text{e.w.} \end{aligned}$$

أي أنه يتبع توزيع بيتا بالمعالم $\alpha = s-r$, $\beta = n-s+r+1$. ولإيجاد توزيع مدى العينة نكتفي بوضع $r=1, s=n$ ونحصل على:

$$K_{1,n}(w) = n(n-1)w^{n-2}(1-w), \quad 0 \leq w \leq 1, \\ = 0, \quad \text{e.w.}$$

ويمكن إيجاد دالة التوزيع التجميعي كالتالي:

$$\begin{aligned} F_W(w) &= n(n-1) \int_0^w t^{n-2} (1-t) dt \\ &= n(n-1) \left[\int_0^w t^{n-2} dt - \int_0^w t^{n-1} dt \right] \\ &= n(n-1) \left[\frac{w^{n-1}}{n-1} - \frac{w^n}{n} \right]. \end{aligned}$$

توزيعات دوال في الإحصاءات الترتيبية

$$\begin{aligned} F_W(w) &= n w^{n-1} - (n-1)w^n, & 0 < w < 1, \\ &= 0, & w \leq 0, \\ &= 1, & w \geq 1. \end{aligned}$$

طريقة أخرى: يمكننا مباشرة استخدام النتيجة التي توصلنا إليها سابقاً كالتالي:

$$\begin{aligned} F_W(w) &= n \int_a^{b-w} f(x) [F(x+w) - F(x)]^{n-1} dx + [1 - F(b-w)]^n \\ & \quad a=0, \quad b=1 \end{aligned}$$

$$= n \int_0^{1-w} [x+w-x]^{n-1} dx + [1 - (1-w)]^n$$

$$= n \int_0^{1-w} w^{n-1} dx + w^n$$

$$= n w^{n-1} (1-w) + w^n$$

$$\begin{aligned} \therefore F_W(w) &= n w^{n-1} - (n-1)w^n, & 0 \leq w < 1, \\ &= 0, & w < 0, \\ &= 1, & w \geq 1. \end{aligned}$$

مثال (٢-١-٢):

إذا كانت العينة X_1, X_2, \dots, X_n مسحوبة من توزيع أسّي له دالة الكثافة

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & 0 < x < \infty, \\ 0, & \text{e.w.} \end{cases}$$

والمطلوب إيجاد دالة كثافة الاحتمال للمدى $K_{1,n}(w)$ ودالة التوزيع $F_W(w)$.

الحل:

$$\begin{aligned} F_W(w) &= n \int_a^{b-w} f(x) [F(x+w) - F(x)]^{n-1} dx + [1 - F(b-w)]^n \\ & \quad a=0, \quad b=\infty \end{aligned}$$

$$= n \int_0^\infty e^{-x} [e^{-x} - e^{-(x+w)}]^{n-1} dx$$

$$= n (1 - e^{-w})^{n-1} \int_0^\infty e^{-nx} dx$$

$$= n (1 - e^{-w})^{n-1} \left. \frac{e^{-nx}}{-n} \right|_0^\infty.$$

توزيعات دوال في الإحصاءات الترتيبية

$$F_W(w) = (1 - e^{-w})^{n-1}, \quad 0 < w < \infty,$$

$$= 0, \quad w \leq 0.$$

$$K_{1,n}(w) = \frac{d}{dw} F_W(w)$$

$$\therefore K_{1,n}(w) = (n-1)e^{-w}(1 - e^{-w})^{n-2}, \quad 0 < w < \infty,$$

$$= 0, \quad e.w.$$

مثال (٢-١-٣):

سحبت عينة حجمها n من توزيع له دالة كثافة الاحتمال:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , \quad a \leq x \leq b, \\ 0 & , \quad e.w. \end{cases}$$

وله دالة التوزيع:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a} & , \quad a < x < b, \\ 1 & , \quad x \geq b. \end{cases}$$

والمطلوب إيجاد دالة كثافة الاحتمال للمدى $K_{1,n}(w)$ ودالة التوزيع $F_W(w)$.

الحل:

بالاعتماد على النتيجة التي توصلنا لها سابقاً فإن:

$$F_W(w) = n \int_a^{b-w} f(x) [F(x+w) - F(x)]^{n-1} dx + [1 - F(b-w)]^n$$

$$= n \int_a^{b-w} \frac{1}{b-a} \left(\frac{x+w-a}{b-a} - \frac{x-a}{b-a} \right)^{n-1} dx + \left(1 - \frac{b-w-a}{b-a} \right)^n$$

$$= n \int_a^{b-w} \frac{1}{b-a} \left(\frac{w}{b-a} \right)^{n-1} dx + \left(\frac{w}{b-a} \right)^n$$

$$= \frac{n}{b-a} \left(\frac{w}{b-a} \right)^{n-1} (b-w-a) + \left(\frac{w}{b-a} \right)^n$$

$$= n \left(\frac{w}{b-a} \right)^{n-1} - (n-1) \left(\frac{w}{b-a} \right)^n, \quad 0 < w < b-a.$$

$$= 0 \quad w \leq 0$$

$$= 1 \quad w \geq b-a.$$

توزيعات دوال في الإحصاءات الترتيبية

ومنها يمكن حساب دالة الكثافة $K_{1,n}(w)$

$$K_{1,n}(w) = \frac{d}{dw} F_w(w)$$

$$\begin{aligned} \therefore K_{1,n}(w) &= \frac{n(n-1)}{b-a} \left(\frac{w}{b-a} \right)^{n-2} - \frac{n(n-1)}{b-a} \left(\frac{w}{b-a} \right)^{n-1} \\ &= \frac{n(n-1)}{b-a} \left(\frac{w}{b-a} \right)^{n-2} \left(1 - \frac{w}{b-a} \right), \quad 0 < w < b-a, \\ &= 0, \quad \text{e.w.} \end{aligned}$$

مثال (٢-١-٤):

بفرض إن X_1, X_2, X_3 تمثل عينة عشوائية من توزيع بيتا بمعلمتين $\alpha = 2, \beta = 1$ و $Y_1 < Y_2 < Y_3$ تمثل الإحصاءات الترتيبية. أوجد التوزيع الاحتمالي لمدى العينة $W = Y_3 - Y_1$ ثم أحسب متوسطه وتباينه.

الحل:

نجد إن دالتي الكثافة والتوزيع للمتغير X هي:

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} 2x & , \quad 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & , \quad \text{e.w.} \end{cases} \\ F(x) &= \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0, \\ x^2 & , \quad 0 < x < 1, \\ 1 & , \quad x \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

ومن العلاقة:

$$\begin{aligned} K_{1,n}(w) &= n(n-1) \int_a^{b-w} [F(x+w) - F(x)]^{n-2} f(x) f(x+w) dx. \\ \therefore K_{1,3}(w) &= 3(3-1) \int_0^{1-w} [(x+w)^2 - x^2] (2x) [2(x+w)] dx \\ &= 24 \int_0^{1-w} x(x+w) [w^2 + 2wx] dx \\ &= 24w \int_0^{1-w} (2x^3 + 3wx^2 + w^2x) dx \\ &= 12w (x^4 + 2wx^3 + w^2x^2) \Big|_0^{1-w} \\ &= 12w ((1-w)^4 + 2w(1-w)^3 + w^2(1-w)^2). \end{aligned}$$

توزيعات دوال في الإحصاءات الترتيبية

$$\therefore K_{1,3}(w) = 12w(1-w)^2, \quad 0 < w < 1,$$

$$= 0, \quad \text{e.w.}$$

أي أن W يتبع توزيع بيتا بمعامل $\alpha = 2, \beta = 3$ وبالتالي فإن متوسطه وتباينه هما على التوالي:

$$E(W) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \frac{2}{5},$$

$$\text{Var}(W) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} = \frac{1}{25}.$$

مثال (٢-١-٥):

برهن إن دالة كثافة الاحتمال لمدى عينة من 3 مشاهدات مسحوبة من التوزيع الطبيعي القياسي

هي:

$$K_{1,3}(w) = \frac{6e^{-\frac{1}{4}w^2}}{\pi\sqrt{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{6}}w} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz.$$

الحل:

$$K_{1,3}(w) = 6 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f(x+w) [F(x+w) - F(x)] dx$$

$$= 6 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x+w)^2}}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_x^{x+w} \frac{e^{-\frac{1}{2}t^2}}{\sqrt{2\pi}} dt \right] dx$$

$$= \frac{6}{(2\pi)\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+(x+w)^2)} \left[\int_x^{x+w} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \right] dx.$$

ولكي نستطيع التبديل بين التكاملين نأخذ التعويض:

$$v = t - x \Rightarrow dv = dt, \quad t = v + x$$

$$\therefore K_{1,3}(w) = \frac{6}{(2\pi)\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+(x+w)^2)} \left[\int_0^w e^{-\frac{1}{2}(v+x)^2} dv \right] dx$$

$$= \frac{6}{(2\pi)\sqrt{2\pi}} \int_0^w \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+(x+w)^2+(v+x)^2)} dx dv$$

$$= \frac{6}{(2\pi)\sqrt{2\pi}} \int_0^w \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}Q} dx dv.$$

حيث:

$$Q = x^2 + (x+w)^2 + (v+x)^2 = 3x^2 + 2x(v+w) + v^2 + w^2.$$

توزيعات دوال في الإحصاءات الترتيبية

نكمل المربع بالنسبة للمتغير x كالتالي:

$$\begin{aligned} Q &= 3 \left(x + \frac{1}{3}(v+w) \right)^2 - \frac{1}{3}(v+w)^2 + v^2 + w^2 \\ &= 3 \left(x + \frac{1}{3}(v+w) \right)^2 + \frac{2}{3}v^2 - \frac{2}{3}vw + \frac{2}{3}w^2. \end{aligned}$$

ونحاول إكمال المربع للمقدار المتبقي بالنسبة للمتغير v كالتالي:

$$\begin{aligned} Q &= 3 \left(x + \frac{1}{3}(v+w) \right)^2 + \frac{2}{3} \left(v - \frac{1}{2}w \right)^2 - \frac{1}{6}w^2 + \frac{2}{3}w^2 \\ &= 3 \left(x + \frac{1}{3}(v+w) \right)^2 + \frac{2}{3} \left(v - \frac{1}{2}w \right)^2 + \frac{1}{2}w^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore K_{1,3}(w) &= \frac{6e^{-\frac{1}{4}w^2}}{(2\pi)\sqrt{2\pi}} \int_0^w e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v-\frac{1}{2}w}{\sqrt{3}/\sqrt{2}}\right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x+\frac{1}{3}(v+w)}{1/\sqrt{3}}\right)^2} dx dv \\ &= \frac{6e^{-\frac{1}{4}w^2}}{(2\pi)\sqrt{3}} \int_0^w e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v-\frac{1}{2}w}{\sqrt{3}/\sqrt{2}}\right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x+\frac{1}{3}(v+w)}{1/\sqrt{3}}\right)^2} dx dv \\ &= \frac{6e^{-\frac{1}{4}w^2}}{(2\pi)\sqrt{3}} \int_0^w e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v-\frac{1}{2}w}{\sqrt{3}/\sqrt{2}}\right)^2} dv. \end{aligned}$$

ولنأخذ التعويض:

$$\begin{aligned} z &= \frac{v - \frac{1}{2}w}{\sqrt{3}/\sqrt{2}} \Rightarrow dz = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} dv \\ \therefore K_{1,3}(w) &= \frac{6e^{-\frac{1}{4}w^2}}{(2\pi)\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{1}{\sqrt{6}}w}^{\frac{1}{\sqrt{6}}w} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\ &= \frac{6e^{-\frac{1}{4}w^2}}{(2\pi)} \frac{2}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{6}}w} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\ &= \frac{6e^{-\frac{1}{4}w^2}}{\pi\sqrt{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{6}}w} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz, \quad 0 < w < \infty. \end{aligned}$$

وهو المطلوب إثباته.

مثال (٦-١-٢):

المطلوب إيجاد دالة كثافة الاحتمال لمدى عينة حجمها n ($W = Y_n - Y_1$) ومسحوبة من توزيع طبيعي قياسي حيث:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

الحل:

$$\begin{aligned} F_W(w) &= n \int_{-\infty}^{\infty} f(x) [F(x+w) - F(x)]^{n-1} dx \\ &= n \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \left[\int_x^{x+w} \phi(t) dt \right]^{n-1} dx \\ &= n \int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}w} \phi(x) \left[\int_x^{x+w} \phi(t) dt \right]^{n-1} dx + n \int_{-\frac{1}{2}w}^{\infty} \phi(x) \left[\int_x^{x+w} \phi(t) dt \right]^{n-1} dx \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

والآن في التكامل I_1 نأخذ التعويض:

$$u = -(x+w) \Rightarrow x = -(u+w), \quad dx = -du$$

$$\begin{aligned} I_1 &= n \int_{-\frac{1}{2}w}^{\infty} \phi[-(u+w)] \left[\int_{-(u+w)}^{-u} \phi(t) dt \right]^{n-1} du \\ &= n \int_{-\frac{1}{2}w}^{\infty} \phi(u+w) \left[\int_u^{u+w} \phi(t) dt \right]^{n-1} du \\ &= n \int_{-\frac{1}{2}w}^{\infty} \phi(x+w) \left[\int_x^{x+w} \phi(t) dt \right]^{n-1} dx. \end{aligned}$$

وبالتعويض في التكامل نحصل على:

$$F_W(w) = n \int_{-\frac{1}{2}w}^{\infty} [\phi(x+w) + \phi(x)] \left[\int_x^{x+w} \phi(t) dt \right]^{n-1} dx.$$

أو يمكن كتابتها على الصورة:

$$F_w(w) = -n \int_{-\frac{1}{2}w}^{\infty} [\phi(x+w) - \phi(x)] \left[\int_x^{x+w} \phi(t) dt \right]^{n-1} dx$$

$$+ 2n \int_{-\frac{1}{2}w}^{\infty} \phi(x+w) \left[\int_x^{x+w} \phi(t) dt \right]^{n-1} dx.$$

مثال (٧-١-٢):

أوجد توزيع المدى لعينة تتبع توزيع بدالتي كثافة وتوزيع كالتالي

$$f(x) = \text{Exp}(-x - e^{-x}) \quad , \quad -\infty < x < \infty,$$

$$F(x) = \text{Exp}(-e^{-x}) \quad , \quad -\infty < x < \infty.$$

الحل:

$$F(x+w) = \text{Exp}(-e^{-(x+w)})$$

$$= [\text{Exp}(-e^{-x})]^{e^{-w}}$$

$$= [F(x)]^{e^{-w}}$$

$$= [F(x)]^v.$$

حيث $v = e^{-w}$. ولإيجاد دالة التوزيع للمدى $W = Y_n - Y_1$ نستخدم الصيغة:

$$F_w(w) = n \int_{-\infty}^{\infty} f(x) [F(x+w) - F(x)]^{n-1} dx$$

$$= n \int_{-\infty}^{\infty} f(x) [(F(x))^v - F(x)]^{n-1} dx.$$

وبأخذ التعويض:

$$t = F(x) \Rightarrow dt = f(x)dx,$$

$$\therefore F_w(w) = n \int_0^1 (t^v - t)^{n-1} dt$$

$$= n \int_0^1 t^{n-1} (t^{v-1} - 1)^{n-1} dt.$$

وباستخدام مفكوك ذي الحدين فإن:

$$\begin{aligned}
 F_w(W) &= n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j \int_0^1 t^{n-1} t^{(n-j-1)(v-1)} dt \\
 &= n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j \int_0^1 t^{j+(n-j-1)v} dt \\
 &= n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j (j+1+(n-j-1)v)^{-1} \\
 &= n \sum_{j=1}^n \binom{n-1}{j-1} (-1)^{j-1} (j+(n-j)v)^{-1} \\
 &= n \sum_{j=1}^n \binom{n-1}{j-1} (-1)^{j-1} (j+e^{-w}(n-j))^{-1}, \quad -\infty < w < \infty.
 \end{aligned}$$

ومنها يمكن إيجاد دالة الكثافة حيث:

$$\begin{aligned}
 K_{1,n}(w) &= \frac{d}{dw} F_w(w) \\
 &= n \sum_{j=1}^n \binom{n-1}{j-1} (-1)^{j-1} (j+(n-j)e^{-w})^{-2} (n-j)e^{-w} \\
 &= n(n-1) \sum_{j=1}^n \binom{n-2}{j-1} (-1)^{j-1} e^{-w} (j+(n-j)e^{-w})^{-2}.
 \end{aligned}$$

مثال (٨-١-٢):

أوجد توزيع المدى لعينة تتبع توزيع له دالة كثافة احتمال:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x e^{-x}, \quad 0 < x < \infty, \\
 &= 0, \quad e.w.
 \end{aligned}$$

الحل:

$$F(x) = \int_0^x t e^{-t} dt.$$

بالتكامل بالتجزئ فإن:

$$\begin{aligned}
 \therefore F(x) &= -te^{-t} \Big|_0^x + \int_0^x e^{-t} dt \\
 &= [-te^{-t} - e^{-t}]_0^x \\
 &= 1 - e^{-x} - x e^{-x}, \quad x > 0, \\
 &= 0, \quad e.w.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x+w) - F(x) &= -e^{-(x+w)} - (x+w)e^{-(x+w)} + e^{-x} + xe^{-x} \\ &= (1 - e^{-w} - we^{-w})e^{-x} + (1 - e^{-w})xe^{-x} \\ &= ue^{-x} + uvxe^{-x}. \end{aligned}$$

حيث:

$$u = (1 - e^{-w} - we^{-w}), \quad uv = (1 - e^{-w})$$

$$\therefore F_w(w) = n \int_0^{\infty} f(x) [F(x+w) - F(x)]^{n-1} dx$$

$$= n \int_0^{\infty} xe^{-x} [ue^{-x} + uvxe^{-x}]^{n-1} dx$$

$$= nu^{n-1} \int_0^{\infty} xe^{-nx} (1 + vx)^{n-1} dx$$

$$= nu^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} v^j \int_0^{\infty} x^{j+1} e^{-nx} dx$$

$$= u^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} v^j \frac{(j+1)!}{n^{j+1}}$$

$$\begin{aligned} F_w(w) &= u^{n-1} \sum_{j=1}^n \binom{n-1}{j-1} \frac{j!}{n^j} v^{j-1}, \quad 0 < w < \infty \\ &= 0 \quad \text{e.w.} \end{aligned}$$

مثال (٩-١-٢):

أوجد توزيع المدى لعينة تتبع توزيع له دالتي كثافة احتمال وتوزيع كما يلي:

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}, \quad F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

الحل:

$$\begin{aligned} F(x+w) &= \frac{1}{1+e^{-(x+w)}} \\ &= \frac{1}{1+ve^{-x}}, \end{aligned}$$

حيث $v = e^{-w}$.

$$\begin{aligned}\therefore F_w(w) &= n \int_{-\infty}^{\infty} f(x) [F(x+w) - F(x)]^{n-1} dx \\ &= n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j \int_{-\infty}^{\infty} f(x) [F(x)]^j [F(x+w)]^{n-j-1} dx \\ &= n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \left[\frac{1}{1+e^{-x}} \right]^j \left[\frac{1}{1+ve^{-x}} \right]^{n-j-1} dx.\end{aligned}$$

وبالتعويض التالي:

$$\begin{aligned}u = \frac{1}{1+ve^{-x}} &\Rightarrow e^{-x} = \frac{1-u}{vu}, \quad e^{-x} dx = \frac{1}{vu^2} du. \\ &\Rightarrow \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{vu}{1+(v-1)u} = \frac{vu}{1+cu},\end{aligned}$$

حيث $c = v - 1$.

$$\begin{aligned}\therefore F_w(w) &= n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j v^{j+1} \int_0^1 \frac{u^{n-1}}{(1+cu)^{j+2}} du \\ &= n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j v^{j+1} A(j,n), \quad 0 < w < \infty.\end{aligned}$$

حيث:

$$\begin{aligned}A(j,n) &= \int_0^1 \frac{u^{n-1}}{(1+cu)^{j+2}} du \\ &= \frac{1}{(-c)^{n-1}} \int_0^1 \frac{(-cu)^{n-1}}{(1+cu)^{j+2}} du \\ &= \frac{1}{(-c)^{n-1}} \int_0^1 \frac{(1-(1+cu))^{n-1}}{(1+cu)^{j+2}} du \\ &= \frac{1}{(-c)^{n-1}} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (-1)^i \int_0^1 (1+cu)^{i-j-2} du.\end{aligned}$$

ويمكن كتابة $A(j,n)$ على الصورة:

$$A(j,n) = \frac{-1}{(1-v)^n} \left[\binom{n-1}{j+1} (-1)^{j+1} \log v + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j+1}}^{n-1} \binom{n-1}{i} (-1)^i \frac{v^{i-j-1}}{i-j-1} \right].$$

(٢-٢) توزيع منتصف المدى:

Distribution of Mid-range

نفرض إن M هو منتصف المدى حيث $M = \frac{Y_1 + Y_n}{2}$ ولغرض إيجاد التوزيع الاحتمالي لـ M يتوجب أولاً إيجاد دالة كثافة الاحتمال المشتركة لـ Y_1, Y_n وهي:

$$g_{1,n}(x, y) = n(n-1)f(x)f(y)[F(y)-F(x)]^{n-2}, \quad a \leq x < y \leq b.$$

ولنأخذ التحويل:

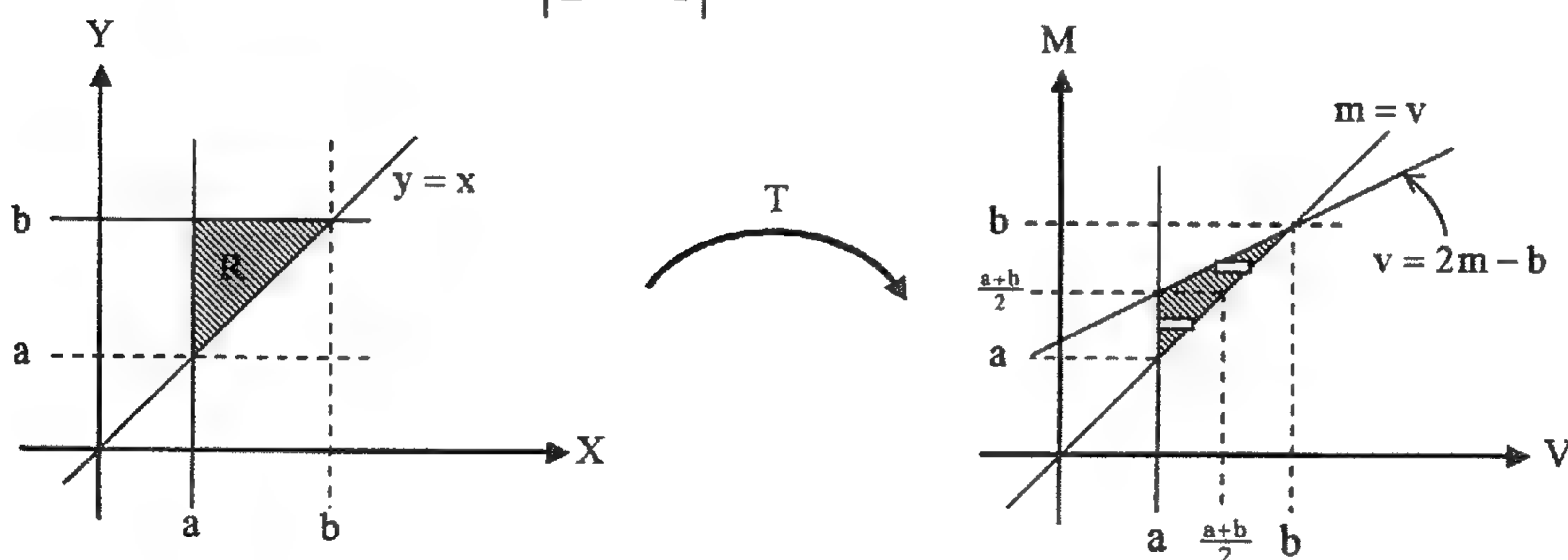
$$T: \quad m = \frac{x+y}{2}, \quad v = x.$$

والتحويل العكسية هي:

$$T^{-1}: \quad x = v, \quad y = 2m - v$$

ومنها يمكن حساب جاكوبيان التحويل كالتالي:

$$J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow |J| = 2.$$



$$g(m, v) = 2n(n-1)f(v)f(2m-v)[F(2m-v)-F(v)]^{n-2}$$

$$, \quad v < m < \frac{1}{2}(v+b), \quad a < v < b.$$

وبالتكامل يمكن حساب دالة الكثافة للمتغير M كالتالي:

$$\begin{aligned} g(m) &= 2n(n-1) \int_a^m f(v)f(2m-v)[F(2m-v)-F(v)]^{n-2} dv, \quad a < m < \frac{a+b}{2} \\ &= 2n(n-1) \int_{2m-b}^m f(v)f(2m-v)[F(2m-v)-F(v)]^{n-2} dv, \quad \frac{a+b}{2} < m < b. \end{aligned}$$

ولكن عندما $b \rightarrow \infty$ فإن

$$g(m) = 2n(n-1) \int_a^m f(v)f(2m-v)[F(2m-v)-F(v)]^{n-2} dv, \quad a < m < \infty.$$

مثال (٢-٢-١):

إذا كان X_1, X_2, X_3 تمثل عينة عشوائية مسحوبة من توزيع بيتا بمعلمتين $\alpha = 2, \beta = 1$ و $Y_1 < Y_2 < Y_3$ تمثل الإحصاءات الترتيبية. أوجد التوزيع الاحتمالي لمتصف المدى $M = \frac{Y_1 + Y_n}{2}$ ثم أحسب متوسطه وتباينه.

الحل:

نجد إن دالتي الكثافة والتوزيع للمتغير X هي على التوالي:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & , \text{e.w.}, \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0, \\ x^2 & , 0 < x < 1, \\ 1 & , x \geq 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore g_{1,3}(x, y) &= 6(2x)(2y)(y^2 - x^2) \\ &= 24xy(y^2 - x^2) \quad , \quad 0 \leq x < y \leq 1, \\ &= 0 \quad , \quad \text{e.w.} \end{aligned}$$

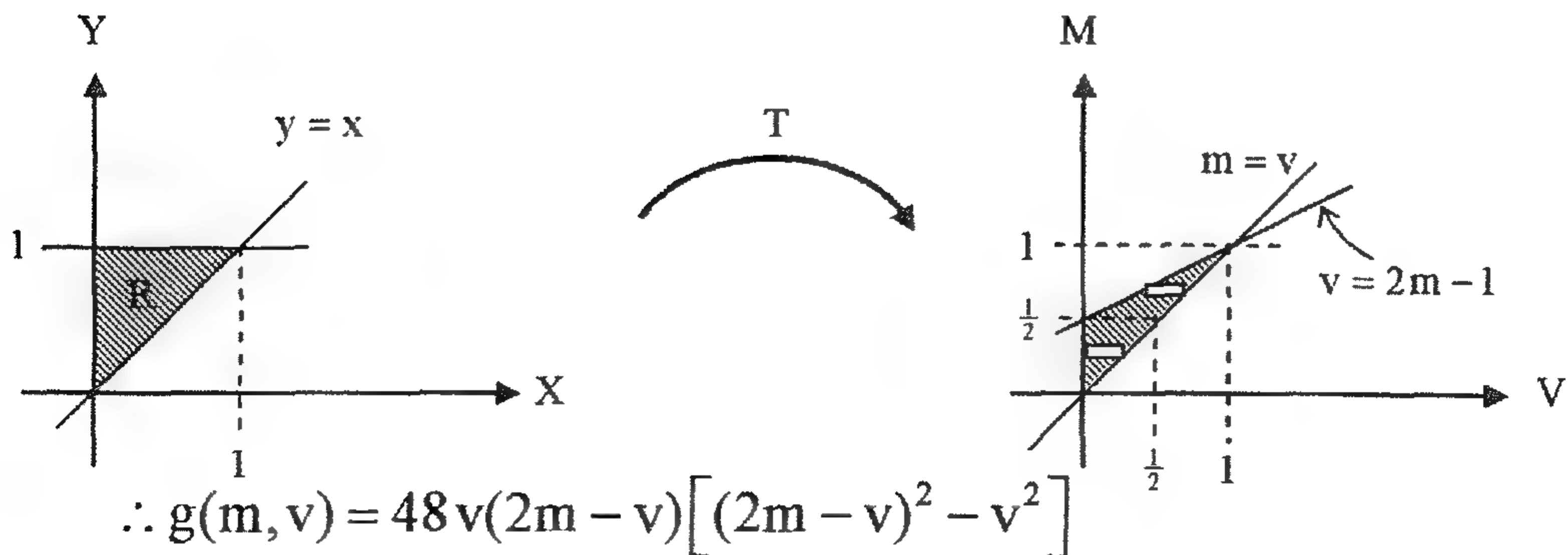
ولنأخذ التحويل:

$$T: \quad m = \frac{x+y}{2} \quad , \quad v = x,$$

والتحويلة العكسية هي:

$$T^{-1}: \quad x = v \quad , \quad y = 2m - v,$$

ومنها يمكن حساب جاكوبيان التحويل $J = 2$.



$$, \quad v < m < \frac{1}{2}(v+1) \quad , \quad 0 < v < 1.$$

وبالتكامل يمكن حساب دالة الكثافة للمتغير M كالتالي:

توزيعات دوال في الإحصاءات الترتيبية

$$\begin{aligned} h(m) &= 48 \int_0^m v(2m-v) \left[(2m-v)^2 - v^2 \right] dv \\ &= 48m \int_0^m (4v^3 - 12mv^2 + 8m^2v) dv \\ &= 48m^5, \quad 0 < m < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(m) &= 48 \int_{2m-1}^m v(2m-v) \left[(2m-v)^2 - v^2 \right] dv \\ &= 48m \int_{2m-1}^m (4v^3 - 12mv^2 + 8m^2v) dv \\ &= 48m^5 - 48m(2m-1)^2, \quad \frac{1}{2} < m < 1. \end{aligned}$$

أي أن:

$$\begin{aligned} \therefore g(m) &= 48m^5, \quad 0 < m < \frac{1}{2} \\ &= 48m^5 - 48m(2m-1)^2, \quad \frac{1}{2} < m < 1. \end{aligned}$$

ومنها يمكن حساب المتوسط والتباين كالتالي:

$$\begin{aligned} E(M) &= \int_0^{\frac{1}{2}} 48m^6 dm + \int_{\frac{1}{2}}^1 (48m^6 - 48m^2(2m-1)^2) dm \\ &= \frac{23}{35}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(M^2) &= \int_0^{\frac{1}{2}} 48m^7 dm + \int_{\frac{1}{2}}^1 (48m^7 - 48m^3(2m-1)^2) dm \\ &= \frac{9}{20}, \end{aligned}$$

$$\text{Var}(M) = E(M^2) - [E(M)]^2 = 0.0181.$$

 مثال (٢-٢-٢):

إذا كان X_1, X_2, \dots, X_n تمثل عينة عشوائية مسحوبة من توزيع منتظم في الفترة $(0,1)$ حيث:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & , \quad \text{e.w.} \end{cases}$$

أوجد توزيع منتصف المدى M .

توزيعات دوال في الإحصاءات الترتيبية

الحل:

بأخذ التحويلة

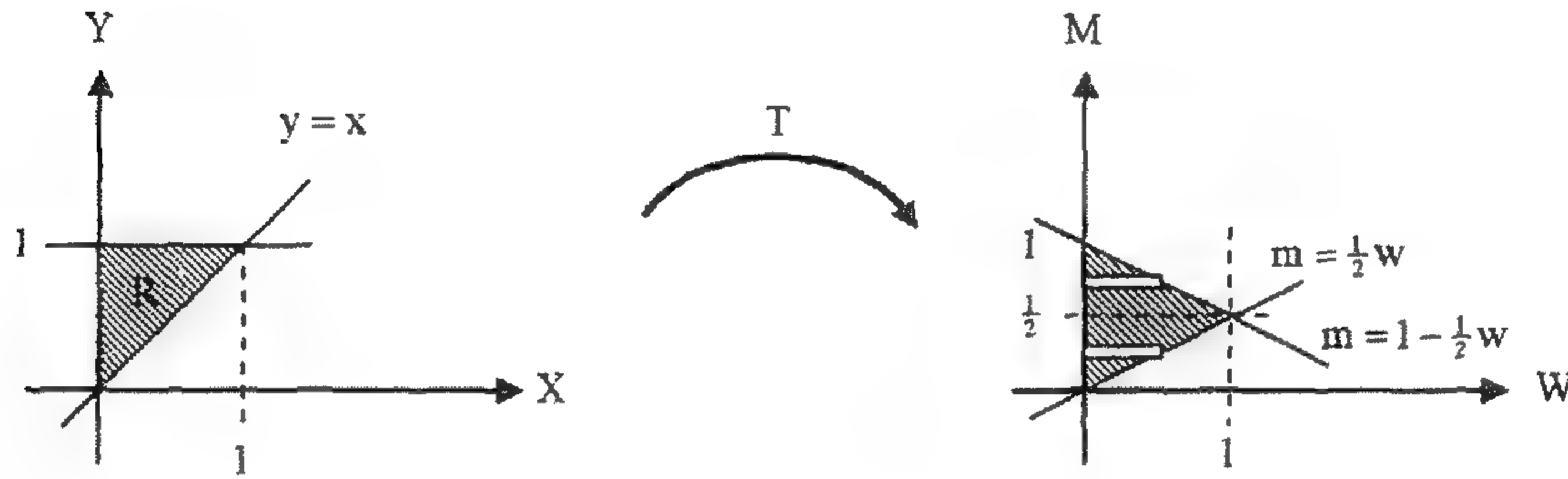
$$T: \quad m = \frac{x+y}{2}, \quad w = y-x,$$

والتحويلة العكسية هي:

$$T^{-1}: \quad x = m - \frac{1}{2}w, \quad y = m + \frac{1}{2}w,$$

فإن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين M, W هي:

$$\begin{aligned} g(m, w) &= n(n-1) \left\{ F(m + \frac{1}{2}w) - F(m - \frac{1}{2}w) \right\}^{n-2} f(m - \frac{1}{2}w) f(m + \frac{1}{2}w) \\ &= n(n-1) w^{n-2}, \quad \frac{1}{2}w \leq m \leq 1 - \frac{1}{2}w, \quad 0 \leq w \leq 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \therefore g(m) &= n(n-1) \int_0^{2(1-m)} w^{n-2} dw \\ &= n(n-1) \frac{w^{n-1}}{n-1} \Big|_0^{2(1-m)} \\ &= n[2(1-m)]^{n-1}, \quad 0 < m < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(m) &= n(n-1) \int_0^{2m} w^{n-2} dw \\ &= n(n-1) \frac{w^{n-1}}{n-1} \Big|_0^{2m} \\ &= n[2m]^{n-1}, \quad \frac{1}{2} < m < 1. \end{aligned}$$

أي أن:

$$\begin{aligned} \therefore g(m) &= n[2(1-m)]^{n-1}, \quad 0 < m < \frac{1}{2} \\ &= n[2m]^{n-1}, \quad \frac{1}{2} < m < 1. \end{aligned}$$

(٢-٣) توزيع المدى القياسي:

Distribution of Standardized Range

ليكن W مدى عينة مسحوبة من أي توزيع احتمالي معرف في الفترة $(-\infty, \infty)$ و V متغير عشوائي يتبع توزيع كاي-المربع بدرجات حرية m فإن :

$$S = \frac{W}{\sqrt{V/m}},$$

يسمى المدى القياسي. ولإيجاد دالة كثافة الاحتمال للمتغير S يتوجب أولاً إيجاد دالة كثافة الاحتمال المشتركة لـ W و V ، وحيث إن V مستقل عن قياسات العينة فإن

$$g(w, v) = K_{l,n}(w)g(v), \quad -\infty < w < \infty, \quad 0 < v < \infty.$$

ولنأخذ التحويل:

$$T: \quad s = \frac{w}{\sqrt{u}}, \quad u = \frac{v}{m},$$

والتحويلة العكسية هي:

$$T^{-1}: \quad w = s\sqrt{u}, \quad v = mu,$$

ومنها يمكن حساب جاكوبيان التحويل:

$$J = \begin{vmatrix} \sqrt{u} & \frac{s}{2\sqrt{u}} \\ 0 & m \end{vmatrix} = m\sqrt{u},$$

وعندها فإن دالة الكثافة المشتركة لـ U, S هي:

$$f_1(s, u) = m\sqrt{u} K_{l,n}(s\sqrt{u})g(mu), \quad 0 < s, u < \infty$$

ومنها يمكن حساب دالة كثافة الاحتمال لـ S كالتالي:

$$h(s) = m \int_0^{\infty} \sqrt{u} K_{l,n}(s\sqrt{u})g(mu)du, \quad 0 < s < \infty.$$

مثال (٢-٣-١):

إذا كانت $X \sim N(0,1)$ وكانت $\phi(x)$ دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير X بينما $\Phi(x)$ دالة التوزيع التجميعي فإن:

$$K_{l,n}(w) = n(n-1) \int_{-\infty}^{\infty} [\Phi(x+w) - \Phi(x)]^{n-2} \phi(x) \phi(x+w) dx.$$

توزيعات دوال في الإحصاءات الترتيبية

ومنها نحصل على:

$$h(s) = m \int_0^{\infty} \sqrt{u} K_{1,n}(s\sqrt{u}) g(mu) du, \quad 0 < s < \infty.$$

والدالة $h(s)$ بصيغتها المعتمدة على $N(0,1)$ شائعة الاستخدام في بعض التطبيقات النظرية الإحصائية وخصوصاً في موضوع اختبارات الفروض وفترات الثقة. وفي هذه الحالة يقال أن المتغير S يتبع توزيع المدى القياسي بدرجة حرية m, n وبدالة كثافة احتمال $h(s)$. وقد تم عمل جداول خاصة لهذا التوزيع تبين قيم S عند مستوى معنوية α ودرجتي حرية m, n . فإذا كانت $S_{n,m}(\alpha)$ تمثل قيمة المدى القياسي عند درجة حرية m, n ومستوى معنوية α فإن هذه القيمة تحقق المعادلة التكاملية التالية:

$$\int_{S_{n,m}(\alpha)}^{\infty} h(s) ds = \alpha = P[S > S_{n,m}(\alpha)],$$

أو إن $\alpha = 1 - P[S < S_{n,m}(\alpha)]$ ، ويمكن إيجاد من الجدول في ملحق (٣) فمثلاً قيمة $S_{10,5}$ ، $\alpha = .05$ هي 6.99 أي أن:

$$P[S < S_{10,5}(.05)] = .95,$$

أو أن:

$$P(S_{10,5}(.05) > 6.99) = .05.$$

ويلاحظ من جداول هذا التوزيع إن $n \geq 2$ ، لأن المدى W يتطلب وجود عينة عشوائية عدد مشاهداتها لا يقل عن 2.

مثال (٢-٣-٢):

بفرض أن X_1, X_2 عينة عشوائية من $N(0,1)$ وإن $Y_1 < Y_2$ تمثل الإحصاءات الترتيبية للعينة وليكن $V \sim \chi^2_{(1)}$ ، أوجد التوزيع الاحتمالي للمدى القياسي S .

الحل:

نجد إن:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

وأن:

$$g(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} v^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}v}, \quad v > 0.$$

وبالتالي فإن:

$$K_{l,n}(w) = n(n-1) \int_{-\infty}^{\infty} [\Phi(x+w) - \Phi(x)]^{n-2} \phi(x) \phi(x+w) dx.$$

وعندما $n = 2$ فإن:

$$\begin{aligned} K_{1,2}(w) &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \phi(x+w) dx \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x+w)^2} dx \\ &= \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}w^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(2x^2+2xw)} dx. \end{aligned}$$

نحاول إكمال المربع بالنسبة للمتغير x فحصل على:

$$\begin{aligned} K_{1,2}(w) &= \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}w^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(2(x+\frac{1}{2}w)^2 - \frac{1}{2}w^2)} dx \\ &= \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{4}w^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x+\frac{1}{2}w}{1/\sqrt{2}}\right)^2} dx. \end{aligned}$$

وإذا افترضنا التحويلة التالية:

$$y = \sqrt{2} \left(x + \frac{w}{2} \right)$$

$$dy = \sqrt{2} dx \quad \text{أو أن:}$$

فإن:

$$dx = \frac{1}{\sqrt{2}} dy,$$

وعليه فإن:

$$K_{1,2}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

والتكامل في الصيغة الأخيرة مساو إلى $\sqrt{2\pi}$. وعلى ذلك:

$$K_{1,2}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{4}} \cdot \sqrt{2\pi}.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{4}w^2}, \quad -\infty < w < \infty.$$

ومنه فإن دالة الكثافة للمتغير S هي:

$$h(s) = \int_0^{\infty} \sqrt{u} K_{1,2}(s\sqrt{u}) g(u) du.$$

حيث $m = 1$ فإن:

$$\begin{aligned}
 h(s) &= \int_0^{\infty} \sqrt{u} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{4}(s^2 u)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}u} du \\
 &= \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_0^{\infty} e^{-(\frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{2})u} du \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda u} du, \quad \lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}s^2 \\
 &= \frac{-1}{\lambda\sqrt{2}\pi} [e^{-\lambda u}]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda\sqrt{2}\pi} \\
 \therefore h(s) &= \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{1}{(\frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{2})} \\
 &= \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{2}}{(\frac{1}{2}s^2 + 1)}, \quad s > 0.
 \end{aligned}$$

وللتأكد من أن الدالة $h(s)$ دالة كثافة احتمال يكفي أن نحسب التكامل:

$$\int_0^{\infty} h(s) ds = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{(\frac{1}{2}s^2 + 1)} ds.$$

وبأخذ التعويض:

$$\begin{aligned}
 y = \frac{s}{\sqrt{2}} &\Rightarrow dy = \frac{ds}{\sqrt{2}}. \\
 \therefore \int_0^{\infty} h(s) ds &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{2} dy}{(y^2 + 1)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dy}{(y^2 + 1)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(y^2 + 1)} = 1.
 \end{aligned}$$

نلاحظ أن التكامل الأخير يمثل تكامل دالة كثافة احتمال كوشي المعيارى. أي أن Y يتبع كوشي بمعلمه $(0, 1)$.

(٢-٤) توزيع الوسيط:

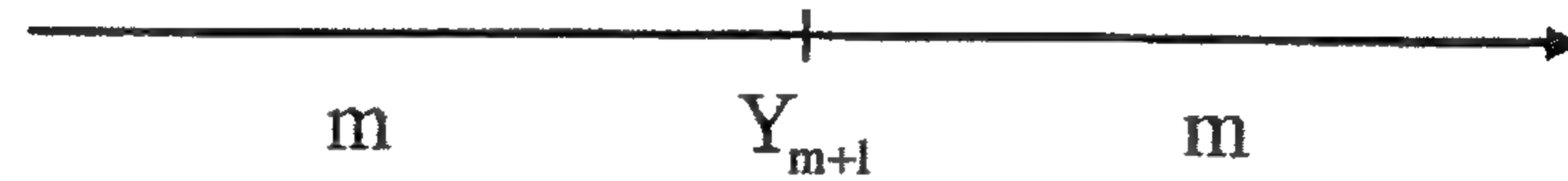
Distribution of The Median

يعرف الوسيط على أنه القيمة التي تقسم مجموعة من البيانات إلى قسمين متساويين بحيث يكون عدد المفردات التي أقل منها يساوي عدد المفردات التي أكبر منها مع مراعاة أن البيانات مرتبة ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً. ويمكن الحصول على دالة كثافة الاحتمال للوسيط في حالتين:

توزيعات دوال في الإحصاءات الترتيبية

١ - عندما تكون عدد المفردات للعينة فردية:

بفرض إن X_1, X_2, \dots, X_n عينة عشوائية مأخوذة من توزيع له دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ ودالة التوزيع $F(x)$ وكانت n فردية. فإن الوسيط هو الإحصاء الترتيبي ذو الرتبة $\frac{n+1}{2}$ ولإيجاد دالة كثافة الاحتمال لـ $Y_{\frac{n+1}{2}}$ نفرض أن حجم العينة $n = 2m + 1$ وبالتالي فإن دالة كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبي $Y_{\frac{n+1}{2}} = Y_{m+1}$ هي:



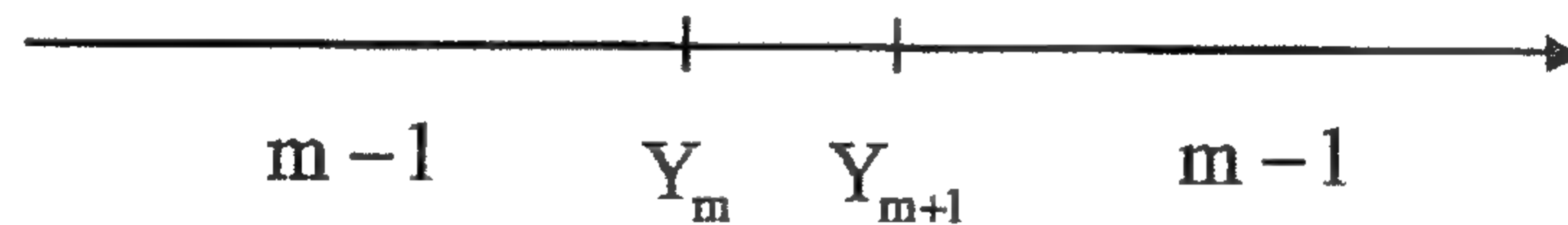
$$g_{m+1}(x) = \frac{(2m+1)!}{(m!)^2} f(x) [F(x)]^m [1-F(x)]^m, \quad a \leq x \leq b.$$

أنظر المثال (١-٢-٧).

٢ - عندما تكون عدد المفردات للعينة زوجية ونرغب في الحصول على قيمة وحيدة لوسيط العينة U .
التعريف المعروف هو:

$$U = \frac{Y_{\frac{n}{2}} + Y_{\frac{n+2}{2}}}{2}.$$

وعلى ذلك توزيع U لابد أن يشتق من دالة الكثافة المشتركة لـ $Y_{\frac{n}{2}}, Y_{\frac{n+2}{2}}$. وبوضع $n = 2m$ فإن:



$$\therefore g_{m,m+1}(x, y) = \frac{(2m)!}{[(m-1)!]^2} f(x) f(y) [F(x)]^{m-1} [1-F(y)]^{m-1}, \quad a \leq x < y \leq b.$$

ولنأخذ التحويل:

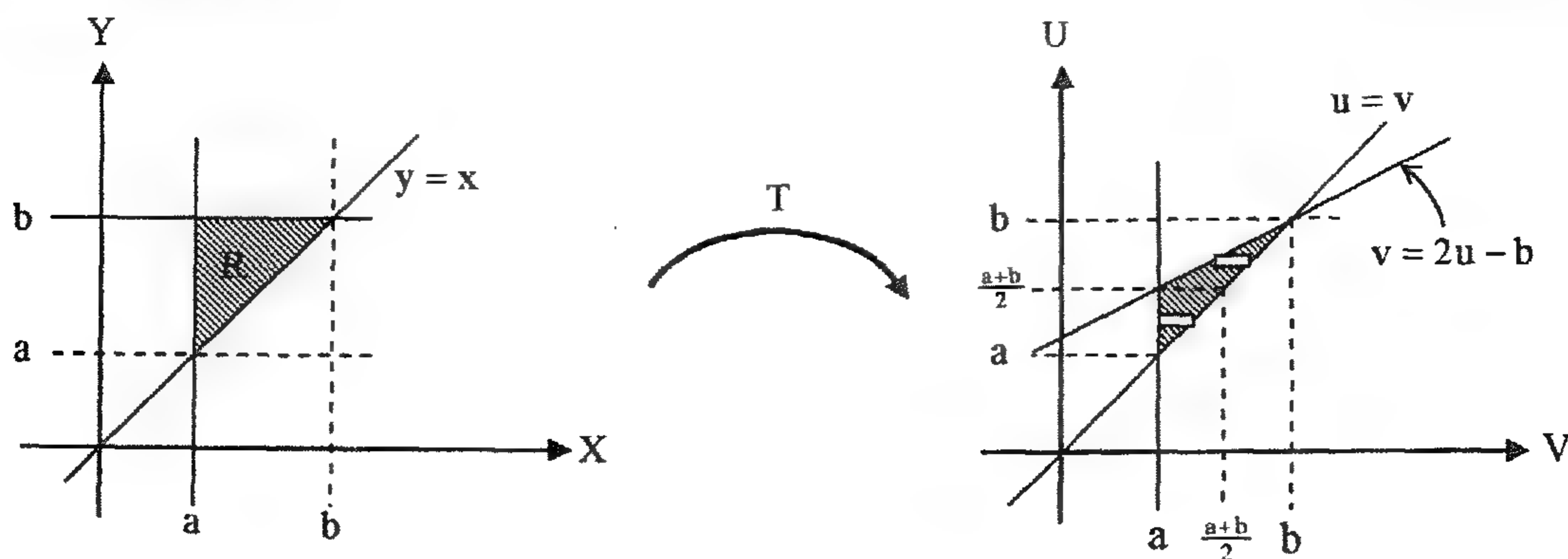
$$T: \quad u = \frac{x+y}{2}, \quad v = x,$$

والتحويل العكسية هي:

$$T^{-1}: \quad x = v, \quad y = 2u - v,$$

ومنها يمكن حساب جاكوبيان التحويل:

$$J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow |J| = 2.$$



$$\therefore f_1(u, v) = 2 \frac{(2m)!}{((m-1)!)^2} f(v) f(2u-v) [F(v)]^{m-1} [1-F(2u-v)]^{m-1}$$

$$, v < u < \frac{1}{2}(v+b), a < v < b.$$

وبالتكامل يمكن حساب دالة الكثافة للمتغير U ، (لاحظ إنه لكي تكامل بالنسبة للمتغير v نأخذ شريحة التكامل أفقية، عندها نجد إن حدود التكامل تختلف على فترتين)

$$f_U(u) = 2 \frac{(2m)!}{((m-1)!)^2} \int_a^u f(v) f(2u-v) [F(v)]^{m-1} [1-F(2u-v)]^{m-1} dv$$

$$, a < u < \frac{a+b}{2}$$

$$= 2 \frac{(2m)!}{((m-1)!)^2} \int_{2u-b}^u f(v) f(2u-v) [F(v)]^{m-1} [1-F(2u-v)]^{m-1} dv$$

$$, \frac{a+b}{2} < u < b$$

ولكن عندما $b = \infty$ فإن:

$$f_U(u) = 2 \frac{(2m)!}{((m-1)!)^2} \int_a^u f(v) f(2u-v) [F(v)]^{m-1} [1-F(2u-v)]^{m-1} dv$$

$$, a < u < \infty.$$

مثال (٢-٤-١):

إذا كانت العينة مسحوبة من توزيع منتظم في الفترة $(0,1)$ وعدد المشاهدات زوجي $n = 2m$.

$$U = \frac{Y_m + Y_{m+1}}{2} \text{ أوجد دالة كثافة الاحتمال للوسيط}$$

الحل:

نجد إن دالتي الكثافة والتوزيع للمتغير X هي:

توزيعات دوال في الإحصاءات الترتيبية

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & , \text{e.w}, \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0, \\ x & , 0 < x < 1, \\ 1 & , x \geq 1. \end{cases}$$

$$\therefore g_{m,m+1}(x,y) = \frac{(2m)!}{((m-1)!)^2} x^{m-1} (1-y)^{m-1} , 0 \leq x < y \leq 1.$$

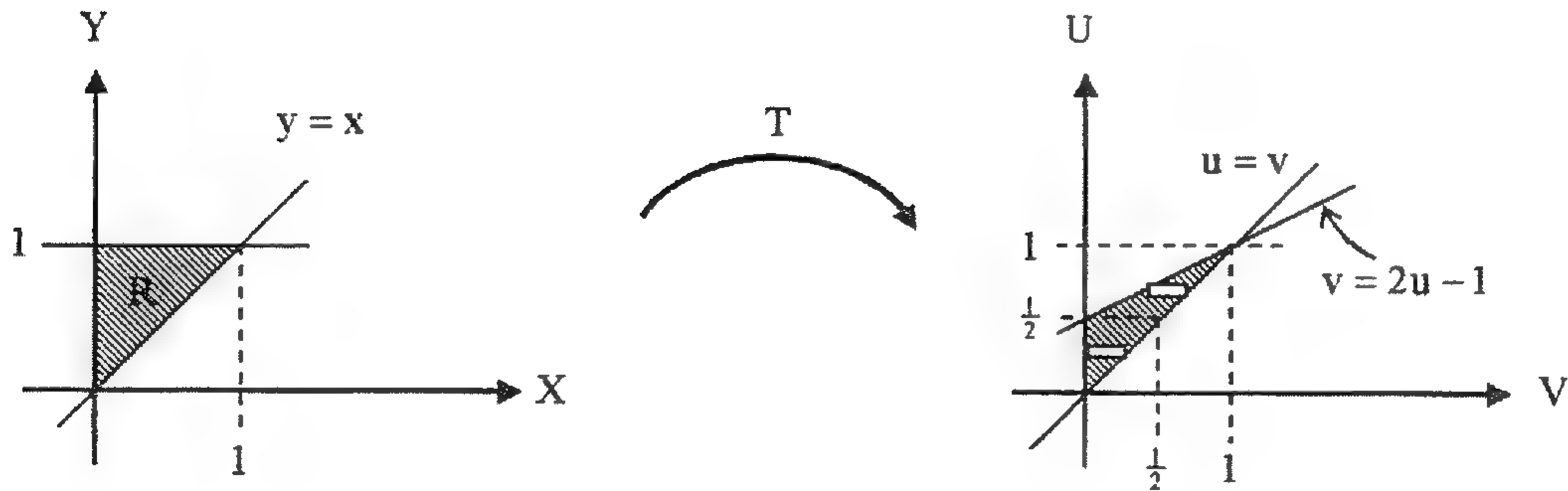
ولنأخذ التحويل:

$$T: u = \frac{x+y}{2} , \quad v = x,$$

والتحويل العكسية هي:

$$T^{-1}: x = v , \quad y = 2u - v,$$

ومنها يمكن حساب جاكوبيان التحويل $J = 2$.



$$\therefore f_1(u,v) = 2 \frac{(2m)!}{((m-1)!)^2} v^{m-1} (1-2u+v)^{m-1} , \quad v < u < \frac{1}{2}(v+1) , \quad 0 < v < 1.$$

وبالتكامل يمكن حساب دالة الكثافة للمتغير U كالتالي:

$$\begin{aligned} f_U(u) &= 2 \frac{(2m)!}{((m-1)!)^2} \int_0^u v^{m-1} (1-2u+v)^{m-1} dv , \quad 0 < u < \frac{1}{2} \\ &= 2 \frac{(2m)!}{((m-1)!)^2} \int_{2u-1}^u v^{m-1} (1-2u+v)^{m-1} dv , \quad \frac{1}{2} < u < 1. \end{aligned}$$

وكحالة خاصة عندما $m = 2$ فإن:

$$\begin{aligned} f_U(u) &= 48 \int_0^u v(1-2u+v)dv \\ &= 48 \int_0^u ((1-2u)v + v^2)dv \\ &= 8u^2(3-4u) \quad , \quad 0 < u < \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

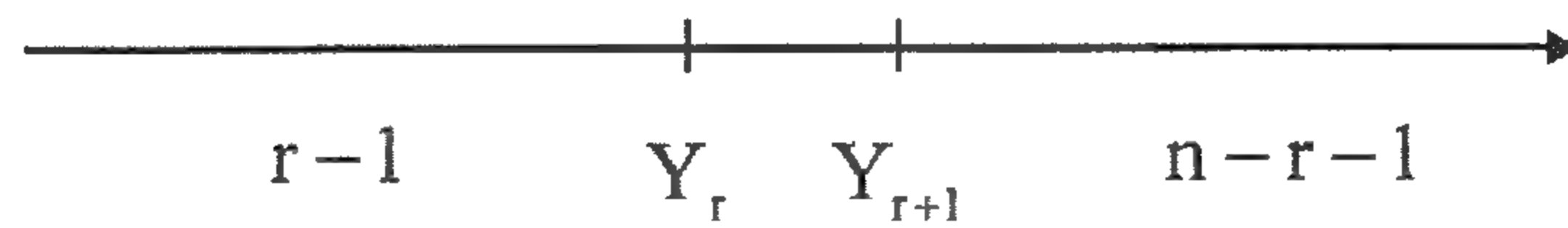
$$\begin{aligned} f_U(u) &= 48 \int_{2u-1}^u v(1-2u+v)dv \\ &= 48 \int_{2u-1}^u ((1-2u)v + v^2)dv \\ &= 8(4u^3 - 9u^2 + 6u - 1) \quad , \quad \frac{1}{2} < u < 1, \end{aligned}$$

أي أن :

$$\begin{aligned} f_U(u) &= 8u^2(3-4u) \quad , \quad 0 < u < \frac{1}{2} \\ &= 8(4u^3 - 9u^2 + 6u - 1) \quad , \quad \frac{1}{2} < u < 1. \end{aligned}$$

(٢-٥) توزيع الفرق بين إحصاءين متتاليين:

إذا كان لدينا عينة عشوائية مسحوبة من توزيع بحيث إن $b \rightarrow \infty$ وعرفنا المتغير $W = Y_{r+1} - Y_r$ (الفرق بين ترتيبين متتاليين) فإن دالة كثافته الاحتمالية تعتمد على التوزيع المشترك للمتغيرين Y_{r+1}, Y_r هي:



$$g_{r,r+1}(x,y) = C f(x) f(y) [F(x)]^{r-1} [1-F(y)]^{n-r-1}$$

$$, \quad a \leq x < y \leq \infty,$$

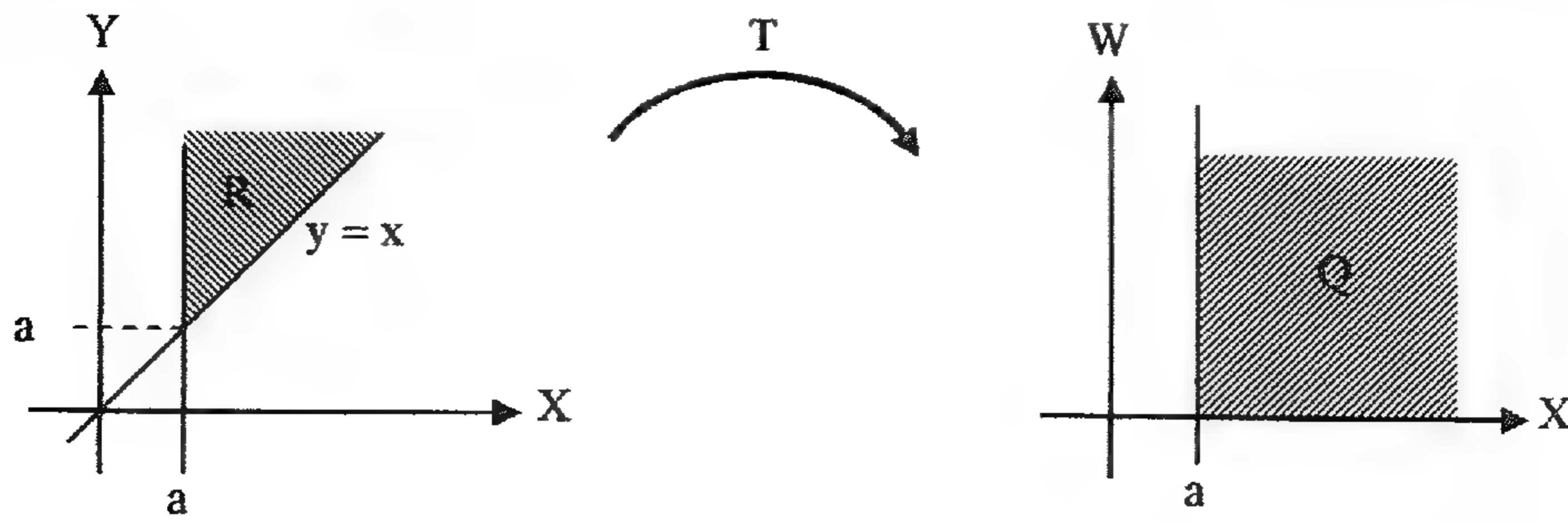
$$C = \frac{n!}{(r-1)!(n-r-1)!} \quad \text{حيث ولأخذ التحويل:}$$

$$T: \quad w = y - x \quad , \quad z = x$$

والتحويل العكسية هي:

$$T^{-1}: \quad x = z \quad , \quad y = z + w$$

ومنها يمكن حساب جاكوبيان التحويل $J = 1$.



$$\therefore h(w, z) = C f(z) f(w + z) [F(z)]^{r-1} [1 - F(w + z)]^{n-r-1}, \quad a \leq w, z \leq \infty.$$

ومنها يمكن حساب دالة الكثافة للمتغير W كالتالي:

$$f_w(w) = C \int_a^\infty f(z) f(w + z) [F(z)]^{r-1} [1 - F(w + z)]^{n-r-1} dz, \quad a \leq w \leq \infty.$$

ودالة التوزيع له هي:

$$\begin{aligned} F_w(w) &= C \int_a^\infty \int_a^\infty f(z) f(w' + z) [F(z)]^{r-1} [1 - F(w' + z)]^{n-r-1} dz dw' \\ &= C \int_a^\infty f(z) [F(z)]^{r-1} \int_a^w f(w' + z) [1 - F(w' + z)]^{n-r-1} dw' dz \\ &= C \int_a^\infty f(z) [F(z)]^{r-1} \frac{[1 - F(w' + z)]^{n-r}}{n-r} \Big|_a^w dz \\ &= \frac{C}{n-r} \int_a^\infty f(z) [F(z)]^{r-1} \left\{ [1 - F(z)]^{n-r} - [1 - F(w + z)]^{n-r} \right\} dz. \end{aligned}$$

$$, \quad a \leq w \leq \infty.$$

مثال (١-٥-٢):

أوجد توزيع المدى $W = Y_{r+1} - Y_r$ لعينة تتبع التوزيع الأسّي بدالة كثافة احتمال:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x}, \quad 0 < x < \infty, \\ &= 0, \quad e.w. \end{aligned}$$

الحل:

باستخدام النتيجة السابقة فإن:

$$F_w(w) = \frac{C}{n-r} \int_0^\infty e^{-z} (1 - e^{-z})^{r-1} \left[(e^{-z})^{n-r} - (e^{-(w+z)})^{n-r} \right] dz$$

$$= \frac{C}{n-r} (1 - e^{-(n-r)w}) \int_0^\infty e^{-(n-r+1)z} (1 - e^{-z})^{r-1} dz.$$

وبأخذ التعويض:

$$\begin{aligned} y = e^{-z} &\Rightarrow dy = -e^{-z} dz, \\ \therefore F_W(w) &= \frac{C}{n-r} (1 - e^{-(n-r)w}) \int_0^1 y^{n-r} (1-y)^{r-1} dy \\ &= \frac{C}{n-r} (1 - e^{-(n-r)w}) B(n-r+1, r) \\ &= \frac{1}{n-r} \frac{n!}{(r-1)!(n-r-1)!} \frac{(r-1)!(n-r)!}{n!} (1 - e^{-(n-r)w}) \\ &= 1 - e^{-(n-r)w}, \quad 0 \leq w \leq \infty. \end{aligned}$$

ومنه فإن دالة الكثافة الاحتمالية هي:

$$f_W(w) = \frac{d}{dw} F_W(w) = (n-r)e^{-(n-r)w}, \quad 0 \leq w \leq \infty.$$

أي أن $W = Y_{r+1} - Y_r$ يتبع التوزيع الأسّي بمعلمة $\lambda = n-r$.

مثال (٢-٥-٢):

وكحالة خاصة عندما $r=1$ فإن $W = Y_2 - Y_1$ ودالة الكثافة الاحتمالية له هي:

$$F_W(w) = n \int_a^\infty f(z) \left\{ [1 - F(z)]^{n-1} - [1 - F(w+z)]^{n-1} \right\} dz, \quad a \leq w < \infty.$$

وعندما $r=n-1$ فإن $W = Y_n - Y_{n-1}$ ودالة الكثافة الاحتمالية له هي:

$$F_W(w) = n(n-1) \int_a^\infty f(z) [F(z)]^{n-2} \{F(w+z) - F(z)\} dz, \quad a \leq w < \infty$$

مثال (٣-٥-٢):

أوجد توزيع المدى $W = Y_{r+1} - Y_r$ لعينة تتبع التوزيع الطبيعي القياسي $N(0,1)$:

الحل:

$$\begin{aligned} f_W(w) &= C \int_{-\infty}^\infty \phi(z) \phi(w+z) [\Phi(z)]^{r-1} [1 - \Phi(w+z)]^{n-r-1} dz \\ &= \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}(w+z)^2} [\Phi(z)]^{r-1} [1 - \Phi(w+z)]^{n-r-1} dz. \end{aligned}$$

توزيعات دوال في الإحصاءات الترتيبية

وبأخذ التعويض:

$$x' = z + \frac{1}{2}w, \quad dx' = dz.$$

$$\therefore f_w(w) = \frac{C}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}w^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x'^2} [\Phi(x' - \frac{1}{2}w)]^{r-1} [1 - \Phi(x' + \frac{1}{2}w)]^{n-r-1} dz$$

(٦-٢) توزيع النسبة بين إحصاءين متتاليين:

لايجاد دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي $Z = \frac{Y_r}{Y_{r+1}}$ حيث إن دالة كثافة الاحتمال المشتركة

لـ Y_{r+1}, Y_r هي:

$$g_{r,r+1}(x, y) = C f(x) f(y) [F(x)]^{r-1} [1 - F(y)]^{n-r-1}, \quad a \leq x < y \leq b.$$

حيث: $C = \frac{n!}{(r-1)!(n-r-1)!}$ ، ولأخذ التحويل:

$$T: \quad z = \frac{x}{y}, \quad w = y,$$

والتحويلة العكسية هي:

$$T^{-1}: \quad x = zw, \quad y = w,$$

ومنها يمكن حساب جاكوبيان التحويل:

$$J = \begin{vmatrix} w & z \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = w.$$

$$\therefore h(z, w) = C w f(zw) f(w) [F(zw)]^{r-1} [1 - F(w)]^{n-r-1}$$

ومنها يمكن إيجاد دالة كثافة الاحتمال للمتغير Z كالتالي:

$$f_z(z) = C \int_{-\infty}^{\infty} w f(zw) f(w) [F(zw)]^{r-1} [1 - F(w)]^{n-r-1} dw.$$

مثال (٦-٢-١):

إذا كانت العينة مسحوبة من توزيع منتظم في الفترة (0,1) أوجد توزيع النسبة بين إحصاءين

متتاليين.

توزيعات دوال في الإحصاءات الترتيبية

الحل:

لنأخذ التحويل:

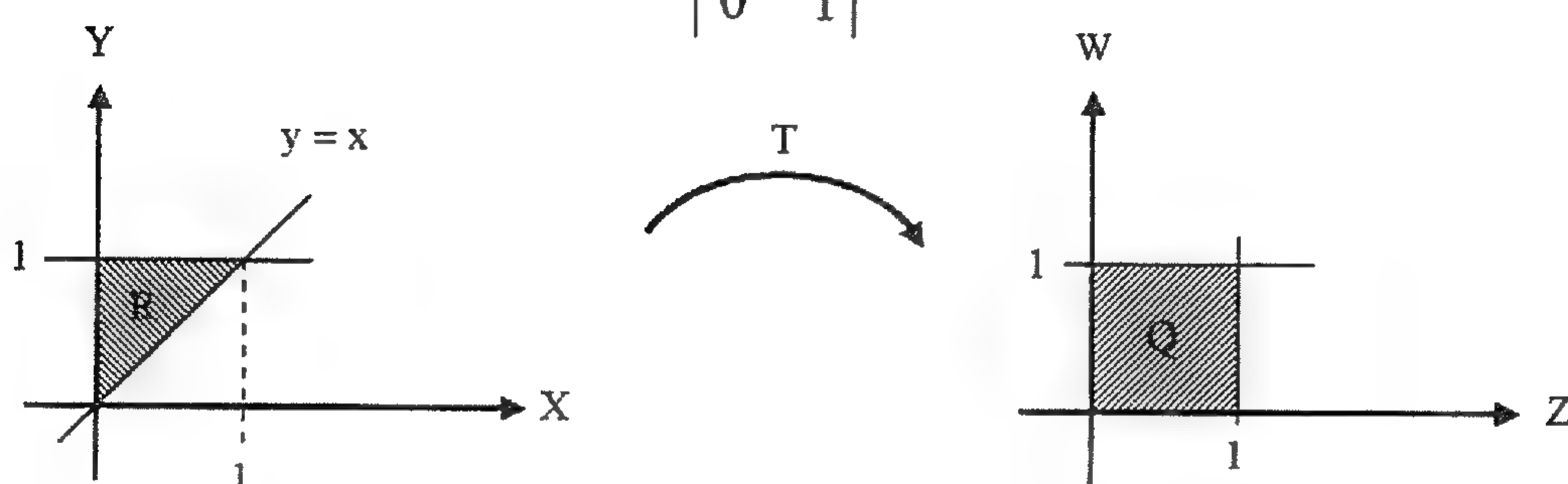
$$T: z = \frac{x}{y}, \quad w = y,$$

والتحويل العكسية هي:

$$T^{-1}: x = zw, \quad y = w,$$

ومنها يمكن حساب جاكوبيان التحويل:

$$J = \begin{vmatrix} w & z \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = w.$$



فإن:

$$g_{r,r+1}(x,y) = Cx^{r-1}(1-y)^{n-r-1}, \quad 0 \leq x < y \leq 1,$$

$$h(z,w) = Cw(zw)^{r-1}(1-w)^{n-r-1}, \quad 0 < z < 1, \quad 0 < w < 1.$$

$$\begin{aligned} \therefore f_z(z) &= Cz^{r-1} \int_0^1 w^r (1-w)^{n-r-1} dw \\ &= Cz^{r-1} B(r+1, n-r) \\ &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r-1)!} \frac{r!(n-r-1)!}{n!} z^{r-1} \\ &= rz^{r-1}, \quad 0 < z < 1. \end{aligned}$$

مثال (٢-٦-٢):

إذا كانت العينة مسحوبة من توزيع أسّي بدالة كثافة احتمال $f(x) = e^{-x}$ أوجد توزيع النسبة

$$Z = \frac{Y_r}{Y_{r+1}} \text{ بين إحصاءين متتاليين}$$

الحل:

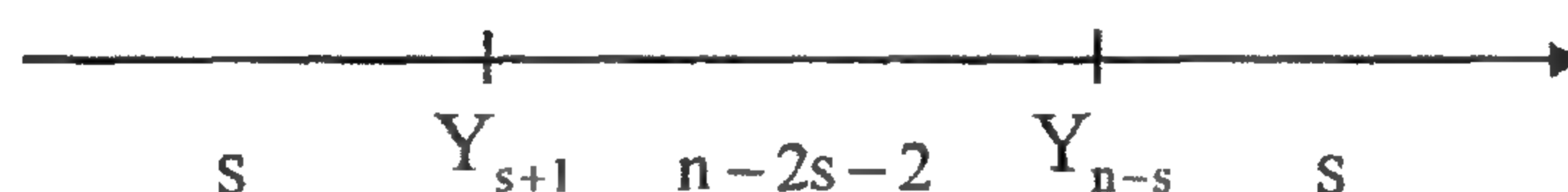
باستخدام النتيجة السابقة فإن:

$$\begin{aligned}
 f_z(z) &= C \int_0^{\infty} w f(zw) f(w) [F(zw)]^{r-1} [1-F(w)]^{n-r-1} dw \\
 &= C \int_0^{\infty} w e^{-wz} e^{-w} [1-e^{-wz}]^{r-1} [e^{-w}]^{n-r-1} dw \\
 &= C \int_0^{\infty} w e^{-(n-r+z)w} [1-e^{-zw}]^{r-1} dw \\
 &= C \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j} (-1)^j \int_0^{\infty} w e^{-[n-r+(j+1)z]w} dw \\
 &= C \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j} (-1)^j \frac{1}{[n-r+(j+1)z]^2}, \quad 0 < z < 1.
 \end{aligned}$$

(٧-٢) توزيع المدى المثني:

The Quasi Range Distribution

يقصد بالمدى المثني الفرق بين الإحصاءين Y_{s+1}, Y_{n-s} حيث Y_{s+1} يسبقها s من المشاهدات و Y_{n-s} يليها s من المشاهدات. أي أن $W = Y_{n-s} - Y_{s+1}$



$$\therefore g_{s+1, n-s}(x, y) = C f(x) f(y) [F(x)]^s [F(y) - F(x)]^{n-2s-2} [1-F(y)]^s, \quad a \leq x < y \leq b.$$

حيث $C = \frac{n!}{(s!)^2 (n-2s-2)!}$ ، ولأخذ التحويل:

$$T: \quad w = y - x, \quad z = x,$$

والتحويل العكسية هي:

$$T^{-1}: \quad x = z, \quad y = z + w.$$

ومنها يمكن حساب جاكوبيان التحويل $J = 1$ (أرجع لرسم مجال المدى في بداية الباب).

$$\therefore f_{Z,W}(z, w) = C f(z) f(z+w) [F(z)]^s [F(z+w) - F(z)]^{n-2s-2} [1-F(z+w)]^s, \quad a \leq z, w, z+w \leq b.$$

ومنها يمكن حساب دالة الكثافة لـ W كالآتي:

$$f_w(w) = C \int_a^{b-w} f(z) f(z+w) [F(z)]^s [F(z+w) - F(z)]^{n-2s-2} [1 - F(z+w)]^s dz$$

, $a \leq w \leq b - a$.

مثال (٢-٧-١):

إذا كانت العينة مسحوبة من توزيع أسّي بدالة كثافة احتمال $f(x) = e^{-x}$ أوجد توزيع المدى المئيني $W = Y_{n-s} - Y_{s+1}$.

الحل:

باستخدام النتيجة السابقة فإن:

$$f_{Z,W}(z, w) = C e^{-(n-s)z} (1 - e^{-z})^s e^{-(s+1)w} (1 - e^{-w})^{n-2s-2}$$

, $0 \leq z, w \leq \infty$.

$$\therefore f_w(w) = C e^{-(s+1)w} (1 - e^{-w})^{n-2s-2} \int_0^\infty e^{-(n-s)z} (1 - e^{-z})^s dz.$$

وبالتعويض:

$$y = e^{-z} \Rightarrow dy = -e^{-z} dz.$$

$$\begin{aligned} \therefore f_w(w) &= C e^{-(s+1)w} (1 - e^{-w})^{n-2s-2} \int_0^\infty y^{n-s-1} (1 - y)^s dz \\ &= C e^{-(s+1)w} (1 - e^{-w})^{n-2s-2} B(n-s, s+1) \\ &= \frac{n!}{(s!)^2 (n-2s-2)!} \frac{s! (n-s-1)!}{n!} e^{-(s+1)w} (1 - e^{-w})^{n-2s-2} \\ &= \frac{(n-s-1)!}{s! (n-2s-2)!} e^{-(s+1)w} (1 - e^{-w})^{n-2s-2}, \quad 0 \leq w \leq \infty. \end{aligned}$$

لاحظ أنه يجب أن يكون $n \geq 2s + 2$ وعندما $s = 1$ فهذا يعني أننا نهمّل الوحدة الأولى والوحدة الأخيرة أما عندما نضع $s = 0$ فإننا نحصل على المدى. ويمكن إيجاد دالة التوزيع كالتالي:

$$F_w(x') = \frac{(n-s-1)!}{s! (n-2s-2)!} \int_0^{x'} e^{-(s+1)w} (1 - e^{-w})^{n-2s-2} dw.$$

وبالتعويض:

$$t = e^{-w} \Rightarrow dt = -e^{-w} dw.$$

$$\begin{aligned}\therefore F_W(x') &= \frac{(n-s-1)!}{s!(n-2s-2)!} \int_{e^{-x'}}^1 t^s (1-t)^{n-2s-2} dw \\ &= 1 - I_{e^{-x'}}(s+1, n-2s-1).\end{aligned}$$

حيث $I_x(p, q)$ دالة بيتا الناقصة. ويمكن كذلك إيجاد الدالة المميزة لـ W وهي:

$$\begin{aligned}\phi_W(it) &= E(e^{itw}) \\ &= \frac{(n-s-1)!}{s!(n-2s-2)!} \int_0^\infty e^{-(s+1-it)w} (1-e^{-w})^{n-2s-2} dw.\end{aligned}$$

وبأخذ التعويض:

$$\begin{aligned}t = e^{-w} &\Rightarrow dt = -e^{-w} dw. \\ \therefore \phi_W(it) &= \frac{(n-s-1)!}{s!(n-2s-2)!} \int_0^\infty t^{s-it} (1-t)^{n-2s-2} dw \\ &= \frac{\Gamma(n-s)}{\Gamma(s+1)\Gamma(n-2s-1)} \frac{\Gamma(s-it+1)\Gamma(n-2s-1)}{\Gamma(n-s-it)} \\ &= \frac{\Gamma(n-s)\Gamma(s-it+1)}{\Gamma(s+1)\Gamma(n-s-it)}.\end{aligned}$$

أما الدالة المولدة للعزوم فيكفي وضع t بدلاً من it فنحصل على:

$$M_W(t) = \frac{\Gamma(n-s)\Gamma(s-t+1)}{\Gamma(s+1)\Gamma(n-s-t)} = \prod_{j=s+1}^{n-s-1} \left(1 - \frac{t}{j}\right)^{-1}$$

ومنها الدالة التراكمية:

$$\begin{aligned}\text{Log } M_W(t) &= \text{Log} \prod_{j=s+1}^{n-s-1} \left(1 - \frac{t}{j}\right)^{-1} \\ &= - \sum_{j=s+1}^{n-s-1} \text{Log} \left(1 - \frac{t}{j}\right) = - \sum_{j=s+1}^{n-s-1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \left(\frac{t}{j}\right)^i\end{aligned}$$

وحيث إن الدالة التراكمية يمكن كتابتها على الصورة $\frac{tk_1}{1!} + \frac{t^2 k_2}{2!} + \frac{t^3 k_3}{3!} + \frac{t^4 k_4}{4!} + \dots$ حيث:

$$k_1 = \mu_1, \quad k_2 = \mu_2, \quad k_3 = \mu_3, \quad k_4 = \mu_4 - 3\mu_2$$

$$\therefore k_1 = \mu_1 = \sum_{j=s+1}^{n-s-1} \frac{1}{j}$$

$$k_2 = \mu_2 = \sum_{j=s+1}^{n-s-1} \frac{1}{j^2}.$$

(٢-٨) المشمولات:

The Coverages

إن بعض الطرق اللامعلمية تعتمد على خاصية بسيطة للإحصاءات الترتيبية وهي أن توزيع المساحة تحت دالة الكثافة بين أي إحصائين ترتيبيين يكون مستقل عن دالة الكثافة. ولتوضيح ذلك نفرض أن X_1, X_2, \dots, X_n عينة عشوائية من مجتمع دالة كثافته الاحتمالية $f(x)$ ودالة التوزيع التجميعي له $F(x)$ وأن $a < Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n < b$ هي الإحصاءات الترتيبية للعينة بوضع:

$$U_{(r)} = F(Y_r) \quad , \quad r = 1, 2, \dots, n$$

وحيث إن $F(x)$ دالة تزايدية بإطراد فإن $0 < U_{(1)} < U_{(2)} < \dots < U_{(n)} < 1$ تمثل الإحصاءات الترتيبية لعينة مسحوبة من مجتمع يتبع توزيع منظم $U(0,1)$ ودالة الكثافة المشتركة لها هي:

$$g(u_1, u_2, \dots, u_n) = n! \prod_{i=1}^n f_U(u_i) = n!.$$

وإذا عرفنا الفرق بين أي إحصاءين $W_{rs} = U_{(s)} - U_{(r)}$ ، فقد برهنا في المثال (٢-١-١) إن توزيع W_{rs} يتبع توزيع بيتا بالمعالم $\alpha = s - r$ ، $\beta = n - s + r + 1$ وله دالة كثافة احتمال:

$$K_{r,s}(w) = \frac{n!}{(s-r-1)!(n-s+r)!} w^{s-r-1} (1-w)^{n-s+r} \quad , \quad 0 \leq w \leq 1,$$

$$= 0 \quad , \quad \text{e.w.}$$

وكحالة خاصة عندما $s = n$ ، $r = 1$ فإن دالة كثافة الاحتمال للإحصاء $W_{1n} = U_{(n)} - U_{(1)}$ هي:

$$K_{1,n}(w) = n(n-1)w^{n-2}(1-w) \quad , \quad 0 \leq w \leq 1,$$

$$= 0 \quad , \quad \text{e.w.}$$

وهي لا تعتمد على دالة الكثافة الأصلية $f(x)$ ولذلك يقال إن المتغير العشوائي W_{rs} له توزيع حر (خالي من المعالم) Free Distribution. ويمكننا حساب توقع W_{rs} من دالة كثافة الاحتمال $K_{r,s}(w)$ كالتالي:

$$E(W_{rs}) = \frac{n!}{(s-r-1)!(n-s+r)!} \int_0^1 w^{s-r-1} (1-w)^{n-s+r} dw$$

$$= \frac{n!}{(s-r-1)!(n-s+r)!} B(s-r+1, n-s+r+1)$$

$$= \frac{n!}{(s-r-1)!(n-s+r)!} \frac{(s-r)!(n-s+r)!}{(n+1)!}$$

$$= \frac{s-r}{n+1}.$$

تعريف (٢-٨-١):

إن المتغيرات (الإحصاءات):

$$\begin{aligned} C_1 &= F(Y_{(1)}) - F(-\infty) = U_{(1)} \\ C_2 &= F(Y_{(2)}) - F(Y_{(1)}) = U_{(2)} - U_{(1)} \\ C_3 &= F(Y_{(3)}) - F(Y_{(2)}) = U_{(3)} - U_{(2)} \\ &\vdots \\ C_r &= F(Y_r) - F(Y_{(r-1)}) = U_{(r)} - U_{(r-1)} \\ &\vdots \\ C_n &= F(Y_n) - F(Y_{(n-1)}) = U_{(n)} - U_{(n-1)} \\ C_{n+1} &= F(\infty) - F(Y_n) = 1 - U_{(n)}. \end{aligned}$$

تسمى المشمولات (أو المغطيات) أي أن المساحة بين أي إحصائين ترتيبيين متتاليين تسمى مشمولة. وعلى ذلك فإن المتغير C_1 يسمى مشمولة أو غطاء الفترة العشوائية $x: -\infty < X < Y_1$ والإحصاء C_r يسمى مشمولة أو غطاء الفترة العشوائية $x: Y_{r-1} < X < Y_r$ ونلاحظ أن:

$$\begin{aligned} U_{(1)} &= C_1 \\ U_{(2)} &= C_1 + C_2 \\ U_{(3)} &= C_3 + C_1 + C_2 \\ &\vdots \\ U_{(r)} &= C_3 + C_1 + \dots + C_r. \end{aligned}$$

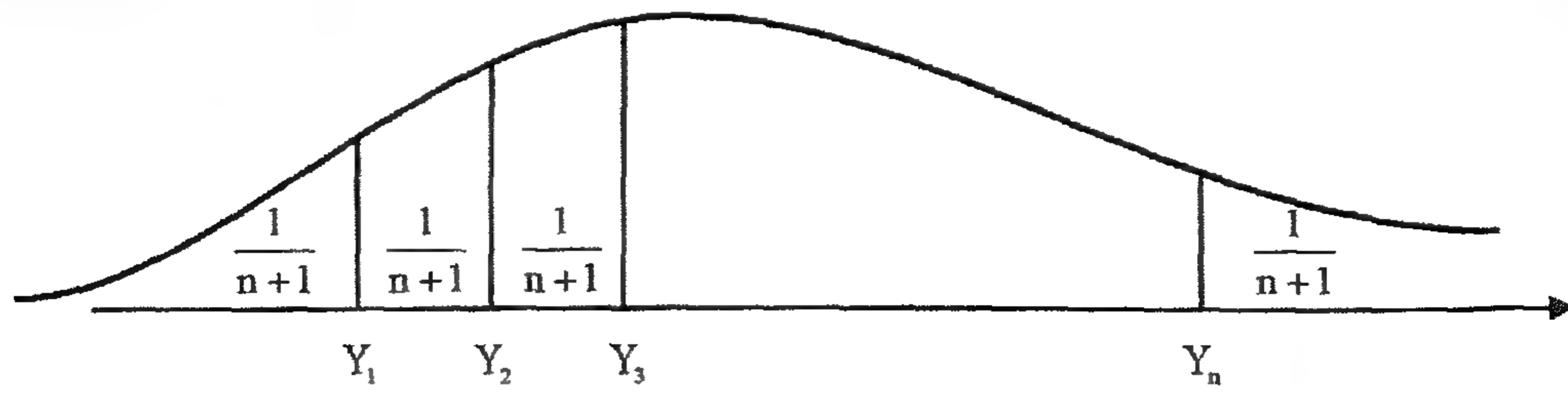
وبالتالي فإن $U_{(r)}$ غطاء أو مشمولة للفترة العشوائية $x: -\infty < X < Y_r$ كما أن $U_{(s)} - U_{(r)}$ تسمى مشمولة أو غطاء للفترة العشوائية $x: Y_r < X < Y_s$ والآن يمكن الحصول على دالة كثافة الاحتمال للمشمولة C_r وذلك بوضع $r = r - 1, s = r$:

$$\begin{aligned} K_{C_r}(z) &= K(z) = n(1-z)^{n-1}, \quad 0 \leq z \leq 1, \\ &= 0, \quad \text{e.w.} \end{aligned}$$

وهذا يعني أن كل مشمولة تتبع توزيع بيتا كما أن:

$$E(C_r) = \frac{1}{n+1}, \quad \text{Var}(C_r) = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}.$$

وبالتالي فإن الإحصاءات الترتيبية تقسم في المتوسط المساحة تحت منحنى $f(x)$ إلى $n+1$ جزء متساوي.



وتستخدم المشمولات في إيجاد فترات السماح كما سيتضح فيما يلي:

فترات السماح للتوزيعات:

Tolerance Limits for Distribution

نناقش في هذا الجزء موضوع مشابه لفترات الثقة يسمى فترات السماح . تستخدم فترات السماح بكثرة في الحياة العملية عندما نرغب في معرفة إذا كانت فترة ما تحتوي على نسبة محدودة من مفردات مجتمع ما . فمثلا إذا كنا ندرس كافة أطوال طلاب الجامعة ونرغب في معرفة احتمال إن فترة ما تحتوي على الأقل على 70% من أطوال الطلاب.

لذلك نفرض أن $X = X_1, X_2, \dots, X_n$ عينه عشوائية مختارة من مجتمع متصل دالة كثافته الاحتمالية $f(x)$ ودالة توزيعه التجميعي $F(x)$ وأن $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n$ هي الإحصاءات الترتيبية للعينه . وإذا كنا نرغب في إيجاد الفترة العشوائية (L_1, L_2) حيث L_1, L_2 إحصاءات من العينه :

$$L_1 < L_2, \quad L_2 = L_2(X), \quad L_1 = L_1(X),$$

بحيث أن الاحتمال γ (معامل السماح) أن الفترة تحتوي على الأقل نسبة p من المشاهدات في المجتمع، حيث p, γ ثوابت و $0 < p < 1, 0 < \gamma < 1$.

أي إننا نحتاج إلى إيجاد L_1, L_2 بحيث إن:

$$P[P(L_1 < X < L_2) \geq p] = \gamma,$$

$$P(L_1 < X < L_2) = \int_{L_1}^{L_2} f(x) dx = F(L_2) - F(L_1) \geq p.$$

أي أن:

$$P[F(L_2) - F(L_1) \geq p] = \gamma.$$

والآن يمكن اختيار L_1, L_2 إحصاءات ترتيبية بحيث أن $L_1 = Y_r, L_2 = Y_s$. أي أننا نرغب في إيجاد

$$P[F(Y_s) - F(Y_r) \geq p] = \gamma,$$

أو بصورة أخرى:

$$P[U_{(s)} - U_{(r)} \geq p] = \gamma \Rightarrow P[W_{rs} \geq p] = \gamma.$$

وحيث إن $W_{rs} = U_{(s)} - U_{(r)}$ متغير عشوائي توزيعه لا يعتمد على التوزيع $F(x)$ ويتبع توزيع بيتا وحيث إن هناك علاقة بين توزيع بيتا التوزيع ذي الحدين حيث:

$$I_p(r, n-r+1) = \sum_{i=r}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

$$\begin{aligned} P[W_{rs} \geq p] = \gamma &\Rightarrow \gamma = 1 - \int_0^p K_{r,s}(w) dw \\ &\Rightarrow \gamma = 1 - I_p(s-r, n-s+r+1) \\ &\Rightarrow \gamma = 1 - \sum_{i=s-r}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\ &\Rightarrow \gamma = \sum_{i=0}^{s-r-1} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}. \end{aligned}$$

وبحل هذه المعادلة نحصل على قيم r, s من جداول توزيع ذي الحدين.

مثال (٢-٨-١):

إذا كانت $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n$ عينة عشوائية مرتبه من توزيع متصل اوجد s, r التي تجعل الفترة (Y_r, Y_s) تحتوي على 50% من مفردات التوزيع بمعامل سماح $\gamma = 0.95$ حيث $n = 10$.

الحل:

نجد إن $p = 0.5$ وبالتالي فإن $r - s$ نوجدتها من المعادلة

$$\gamma = \sum_{i=0}^{s-r-1} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{n-i} \Rightarrow 0.95 = \sum_{i=0}^{s-r-1} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^n, n = 10$$

ومن جداول توزيع ذي الحدين في ملحق (١) نجد إن:

$$\sum_{i=0}^8 \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.989.$$

أي أن:

$$s - r - 1 = 8 \Rightarrow s - r = 9.$$

أي أننا أخذنا فترة سماح بمعامل سماح أكبر قليلاً من معامل السماح المطلوب. كما إن s, r الممكنة في هذه الحالة هي $s = 10, r = 1$.

في بعض الحالات يكون r, s معلومتين بحيث إن $s = n, r = 1$ والمطلوب إيجاد معامل السماح γ

$$\begin{aligned}\therefore \gamma &= \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\ &= 1 - p^n - np^{n-1}(1-p) \\ &= 1 - np^{n-1} + (n-1)p^n.\end{aligned}$$

 مثال (٢-٨-٢):

إذا كانت $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n$ الإحصاءات الترتيبية لعينة عشوائية حجمها $n = 7$ أحسب معامل السماح :

أ. إذا أخذنا (Y_1, Y_7) فترة سماح بنسبة 80% من التوزيع.

ب. إذا أخذنا (Y_2, Y_6) فترة سماح بنسبة 50% من التوزيع.

الحل:

أ. نلاحظ إن $p = .8, s = 7, r = 1, n = 7$ وبالتالي فإن :

$$\begin{aligned}\gamma &= 1 - np^{n-1} + (n-1)p^n \\ &= 1 - (7)(.8)^6 - (6)(.8)^7 \\ &= .42.\end{aligned}$$

ب. $p = .85, s = 6, r = 2, n = 7$:

$$\begin{aligned}\gamma &= \sum_{i=0}^3 \binom{7}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{128} \left[\binom{7}{0} + \binom{7}{1} + \binom{7}{2} + \binom{7}{3} \right] \\ &= \frac{64}{128} = 0.5.\end{aligned}$$

يعني أن القيم بين الإحصائين (Y_2, Y_6) تعطي 50% من التوزيع وذلك بمعامل سماح 50%.

 مثال (٣-٨-٢):

إذا كانت $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n$ عينة عشوائية مرتبه من توزيع متصل اوجد حجم العينة اللازم حتى نستطيع القول باحتمال قدره 0.85 أن على الأقل 70% من مفردات التوزيع تقع في مدى العينة.

الحل:

$$\gamma = .85, \quad p = .7, \quad s = n, \quad r = 1.$$

نريد تحديد n التي تحقق المعادلة:

$$.85 = \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n}{i} (.7)^i (.3)^{n-i}$$

وبالبحث في جدول توزيع ذي الحدين في ملحق (١) تحت $p = .7$ نجد أن $n - 2 = 8$

عند 851. أي أن $n = 10$. ويمكن حل هذا المثال بطريقة أخرى حيث أن:

$$1 - n(0.7)^{n-1} + (n-1)(0.7)^n = 0.85$$

$$\Rightarrow (0.7)^{n-1} [n - (n-1)(0.7)] = 0.15$$

$$\Rightarrow (0.7)^{n-1} [(0.3)n + 0.7] = 0.15.$$

وبحل هذه المعادلة نجد أن $n = 10$.

نلاحظ أن فترة السماح عبارة عن إحصاءين أحدهما أكبر من الآخر ويكونان فترة حدودها عشوائية وإننا نكون واثقين بمعامل سماح معين أن هذه الفترة تحتوي على نسبة محدودة من مفردات التوزيع.

(٩-٢) دالة التوزيع التجميعي للعينة

Sample Cumulative Distribution Function

إذا كانت X_1, X_2, \dots, X_n عينة عشوائية من مجتمع داله توزيعه التجميعية $F(x)$ وكانت Y_1, Y_2, \dots, Y_n الإحصاءات الترتيبية للعينة فإن داله التوزيع التجميعية لهذه العينة يرمز لها بالرمز $F_n(x)$ تعرف كالتالي:

$$F_n(x) = \frac{k}{n}$$

حيث k يمثل عدد قيم Y_i التي اقل من او تساوى x .

وعندما x ثابتة نجد أن $F_n(x)$ احصاء لانها داله في بيانات العينة وبالتالي يكون لها توزيع احتمالي تحدده النظرية التالية:

$$P\left(F_n(x) = \frac{k}{n}\right) = \binom{n}{k} \{F(x)\}^k \{1 - F(x)\}^{n-k}$$

البرهان:

$$Z_i = \begin{cases} 1 & -\infty \leq X_i \leq x \\ 0 & X_i > x \end{cases}$$

وعلى ذلك Z_i متغيراً عشوائياً يتبع توزيع برنولى بمعلمه $F(x)$. وبالتالي فإن $\sum Z_i$ والذي يمثل عدد القيم X_i التي أقل من أو تساوى x يتبع توزيع دى الحدين بمعالم $F(x)$, n . ولكن:

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum Z_i$$

يكون لها نفس التوزيع مثل الوسط الحسابي لتوزيع برنولى وهى النتيجة المطلوبة. وعلى ذلك فإن:

$$E[F_n(x)] = F(x) \rightarrow E\{F_n(v)\} = F(v) = \frac{1}{2},$$

حيث v هو وسيط المجتمع . ايضاً:

$$\text{Var}[F_n(x)] = \frac{1}{n} F(x)\{1-F(x)\}$$

وهذا يعنى أن $F_n(x)$ (لقيم x الثابتة) تكون مقدر غير متحيز للمعلمة $F(x)$. وعندما تكون n كبيرة فإن :

$$F_n(x) \approx N\left[F(x), \frac{1}{n} F(x)\{1-F(x)\}\right]$$

أى أن:

$$\sqrt{n} \{F_n(x) - F(x)\} \approx N[0, F(x)\{1-F(x)\}].$$

الباب الثالث

عزوم الإحصاءات الترتيبية

(١-٣) العزوم المضبوطة للإحصاءات الترتيبية:

تعتبر عزوم الإحصاءات الترتيبية مهمة وذلك لان هناك دوال خطية من الترتيبات الإحصائية تستخدم في إيجاد مقدرات تستخدم في تقدير معالم المجتمع. وأيضاً فإن القيم المتوقعة للإحصاءات الترتيبية في عينة من توزيع معين غالباً ما تستخدم في مجال الاستدلال اللامعلمي.

وحيث إن الإحصاءات الترتيبية متغيرات عشوائية فإن عزومها تعرف بالطرق العادية . على سبيل المثال في الحالة المتصلة فإن العزم من الرتبة k حول الصفر للإحصاء الترتيبي Y_r في عينة عشوائية من حجم n مختارة من مجتمع بدالة توزيع تجميعي $F(x)$ هي:

$$E(Y_r^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k g_r(x) dx$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) [F(x)]^{r-1} [1-F(x)]^{n-r} dx.$$

وبنفس الشكل العزوم حول الصفر من الرتبة k, ℓ للمتغيرين Y_r, Y_s ($r < s$) هي:

$$E(Y_r^k Y_s^\ell) = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^y x^k y^\ell f(x) f(y) [F(x)]^{r-1} [F(y) - F(x)]^{s-r-1} [1-F(y)]^{n-s} dx dy.$$

وفي كثير من الأحيان لا يمكن الحصول على العزوم السابقة بالضبط.

مثال (١-١-٣):

لتكن X_1, X_2, \dots, X_n عينة عشوائية من الحجم n سحبت من التوزيع المنتظم في الفترة $(0,1)$. المطلوب إيجاد الوسط الحسابي والتباين والتغاير للإحصاءات الترتيبية.

الحل :

دالة كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبي Y_r تعطى كالتالي:

$$g_r(x) = \begin{cases} \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} x^{r-1} (1-x)^{n-r} & , 0 < x < 1, \\ 0 & , \text{e.w.} \end{cases}$$

$$\therefore E(Y_r^k) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_0^1 x^{r+k-1} (1-x)^{n-r} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} B(r+k, n-r+1) \\
 &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \frac{(r+k-1)!(n-r)!}{(n+k)!} \\
 &= \frac{n!(r+k-1)!}{(r-1)!(n+k)!}, \quad 1 \leq r \leq n.
 \end{aligned}$$

حيث k عدد صحيح موجب. وبوضع $k=1$ نحصل على الوسط الحسابي وهو:

$$E(Y_r) = \frac{r}{n+1}.$$

والتباين هو:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(Y_r) &= E(Y_r^2) - [E(Y_r)]^2 \\
 &= \frac{r(r+1)}{(n+1)(n+2)} - \frac{r^2}{(n+1)^2} \\
 &= \frac{r(r+1)(n+1) - r^2(n+2)}{(n+1)^2(n+2)} \\
 &= \frac{r^2n + r^2 + rn + r - r^2n - 2r^2}{(n+1)^2(n+2)} \\
 &= \frac{r(n-r+1)}{(n+1)^2(n+2)}.
 \end{aligned}$$

وللحصول على التغير لزوج من الإحصاءات الترتيبية Y_r, Y_s نحتاج إلى دالة الكثافة المشتركة لهما والتي تعطى كما يلي:

$$\begin{aligned}
 g_{r,s}(x, y) &= C x^{r-1} (y-x)^{s-r-1} (1-y)^{n-s}, \quad 0 \leq x < y \leq 1, \\
 &= 0, \quad \text{e.w.}
 \end{aligned}$$

$$C = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} \quad \text{حيث:}$$

$$\therefore E(Y_r Y_s) = C \int_0^1 \int_0^y x^r y (y-x)^{s-r-1} (1-y)^{n-s} dx dy.$$

بأخذ التعويض:

$$z = \frac{x}{y} \Rightarrow x = yz, \quad dx = y dz.$$

$$\therefore E(Y_r Y_s) = C \int_0^1 y (1-y)^{n-s} \int_0^1 (zy)^r (y-zy)^{s-r-1} y dz dy$$

$$\begin{aligned}
&= C \int_0^1 y^{s+1} (1-y)^{n-s} \int_0^1 z^r (1-z)^{s-r-1} dz dy \\
&= CB(s+2, n-s+1) B(r+1, s-r) \\
&= \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} \frac{(s+1)!(n-s)! r!(s-r+1)!}{(n+2)! s!} \\
\therefore E(Y_r Y_s) &= \frac{r(s+1)}{(n+2)(n+1)},
\end{aligned}$$

التغاير بين Y_r, Y_s هو:

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(Y_r, Y_s) &= E(Y_r Y_s) - E(Y_r)E(Y_s) \\
&= \frac{r(s+1)}{(n+1)(n+2)} - \frac{rs}{(n+1)^2} \\
&= \frac{r(n-s+1)}{(n+1)^2(n+2)}, \quad r < s,
\end{aligned}$$

معامل الارتباط بين Y_r, Y_s هو:

$$\begin{aligned}
\rho_{r,s} &= \frac{\text{Cov}(Y_r, Y_s)}{\sqrt{\text{Var}(Y_r) \text{Var}(Y_s)}} \\
&= \frac{\frac{r(n-s+1)}{(n+1)^2(n+2)}}{\sqrt{\frac{r(n-r+1)}{(n+1)^2(n+2)} \frac{s(n-s+1)}{(n+1)^2(n+2)}}} \\
&= \sqrt{\frac{r(n-s+1)}{s(n-r+1)}}.
\end{aligned}$$

وكحالة خاصة معامل الارتباط بين أصغر وأكبر القيم نحصل عليه بوضع $s=n, r=1$ حيث:

$$\rho_{1,n} = \sqrt{\frac{(1)(n-n+1)}{(n)(n-1+1)}} = \frac{1}{n}.$$

يلاحظ من المعادلة السابقة إن معامل الارتباط يتناسب عكسياً مع حجم العينة.

مثال (٣-١-٢):

لتكن X_1, X_2, \dots, X_n عينة عشوائية من الحجم n سحبت من التوزيع الأسّي بمعلمة θ .
المطلوب إيجاد الوسط الحسابي والتباين لكل من Y_r, Y_s والتغاير بين Y_r, Y_s .
الحل:

بالعودة إلى المثال (١-٣-٢) عرفنا المتغيرات العشوائية:

$$W_i = Y_i - Y_{i-1} \quad , \quad i=1,2,\dots,n \quad , \quad Y_0 = 0,$$

وبرهنا أن كل منها مستقل ويتبع التوزيع الأسّي حيث:

$$W_i \sim \text{Exp}\left(\frac{\theta}{n-i+1}\right),$$

وبالتحويل العكسي:

$$Y_r = \sum_{i=1}^r W_i.$$

ومنه يمكن حساب الوسط الحسابي للإحصاء الترتيبي Y_r كالتالي:

$$\begin{aligned} E(Y_r) &= E\left(\sum_{i=1}^r W_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^r E(W_i) \\ &= \sum_{i=1}^r \frac{\theta}{n-i+1} \\ &= \theta \sum_{i=1}^r \frac{1}{n-i+1}. \end{aligned}$$

القيم المتوقعة للإحصاءات الترتيبية، $E(Y_r)$ في عينات من الحجم n من توزيع أسّي قياسي ($\theta=1$) معطاة في الجدول (١-٣).

جدول (١-٣)

r/n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.500	0.333	0.250	0.200	0.167	0.143	0.125	0.111	0.100
2	1.500	0.833	0.583	0.450	0.367	0.310	0.268	0.236	0.211
3		1.833	1.083	0.783	0.617	0.510	0.435	0.379	0.336
4			2.083	1.283	0.950	0.760	0.635	0.546	0.479
5				2.283	1.450	1.093	0.885	0.746	0.646
6					2.450	1.593	1.218	0.996	0.846
7						2.593	1.718	1.329	1.096
8							2.718	1.829	1.429
9								2.829	1.929
10									2.929

من الجدول (١-٣) نجد أن القيم المتوقعة $E(Y_r)$, ($r=1,2,\dots,n$) معطاة لقيم $n=2(1)10$ وتسمى هذه القيم درجات أسية score exponential ولها تطبيقات مفيدة في الاستدلال الالامعلمي.

التباين للإحصاء الترتيبي Y_r هو:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(Y_r) &= \text{Var}\left(\sum_{i=1}^r W_i\right) \\
 &= \sum_{i=1}^r \text{Var}(W_i) \\
 &= \sum_{i=1}^r \frac{\theta^2}{(n-i+1)^2} \\
 &= \theta^2 \sum_{i=1}^r \frac{1}{(n-i+1)^2}, \\
 E(Y_r Y_s) &= E\left[\left(\sum_{i=1}^r W_i\right)\left(\sum_{j=1}^s W_j\right)\right] \\
 &= E\left(\sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^r W_i W_j\right) \\
 &= E\left(\sum_{i=1}^r W_i^2\right) + E\left(\sum_{j=1}^s \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r W_i W_j\right) \\
 &= \sum_{i=1}^r E(W_i^2) + \sum_{j=1}^s \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r E(W_i W_j).
 \end{aligned}$$

وحيث إن:

$$\begin{aligned}
 E(W_i^2) &= \text{Var}(W_i) + [E(W_i)]^2 \\
 &= \frac{\theta^2}{(n-i+1)^2} + \frac{\theta^2}{(n-i+1)^2} \\
 &= \frac{2\theta^2}{(n-i+1)^2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E(W_i W_j) &= E(W_i)E(W_j) \\
 &= \frac{\theta^2}{(n-i+1)(n-j+1)},
 \end{aligned}$$

$$E(Y_r Y_s) = \sum_{i=1}^r \left(\frac{2\theta^2}{(n-i+1)^2} \right) + \sum_{j=1}^s \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r \left(\frac{\theta^2}{(n-i+1)(n-j+1)} \right).$$

ويمكن استخدامه لحساب التباين بين أي إحصاءين ترتيبيين أو يمكن حساب التباين كالتالي:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_r, Y_s) &= \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^r W_i, \sum_{j=1}^s W_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^r \text{Cov}(W_i, W_j) \end{aligned}$$

وحيث إن المتغيرات W_i مستقلة فإن:

$$\text{Cov}(W_i, W_j) = \begin{cases} 0 & , i \neq j \\ \text{Var}(W_i) & , i = j \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_r, Y_s) &= \sum_{i=1}^r \text{Var}(W_i) + \sum_{j=1}^s \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r \text{Cov}(W_i, W_j) \\ &= \sum_{i=1}^r \text{Var}(W_i) \\ &= \theta^2 \sum_{i=1}^r \frac{1}{(n-i+1)^2}. \end{aligned}$$

وكحالة خاصة عندما $s=n, r=1$ فإن:

$$\text{Cov}(Y_1, Y_n) = \frac{\theta^2}{n^2}.$$

مثال (٣-١-٣):

في اختبارات الحياة، وضعت عينة عشوائية من الحجم $n=9$ في الاختبار. أزمنة الحياة بالساعات لوحداث التجربة يمكن اعتبارهم متغيرات عشوائية مستقلة من توزيع أسّي بمتوسط حياة $\mu=100$ ساعة. لحساب التوفير في زمن الحياة الكلي عند إنهاء التجربة بعد فشل الوحدة رقم 5 ($r=5$). وإذا كان $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n$ تمثل أزمنة الحياة المرتبة للوحدات، فإن Y_9 تمثل زمن انتهاء التجربة بعد فشل جميع الوحدات التي عددها $n=9$ ووسيط العينة Y_5 يمثل زمن انتهاء التجربة إذا أوقفنا التجربة بعد فشل الوحدة رقم 5. من جدول (٣-١)، نجد أنه لعينة عشوائية من الحجم $n=9$ من توزيع أسّي قياسي، فإن القيمة المتوقعة لأكبر الإحصاءات الترتيبية هو 2.829 والقيم المتوقعة للإحصاء الترتيبي من الرتبة 5 هو 0.746. وعلى ذلك

$$E(Y_9) = 100(2.829) = 282.9,$$

$$E(Y_5) = 100(0.746) = 74.6.$$

وعلى ذلك النسبة المئوية للاختزال في زمن الحياة هو:

$$\frac{282.9 - 74.6}{282.9} = 73.6\%.$$

مثال (٣-١-٤):

بفرض أن $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n$ تمثل الإحصاءات الترتيبية من عينة عشوائية من الحجم n مختارة من توزيع طبيعي قياسي $N(0,1)$. سوف نستخدم الرمز $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ والرمز

$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(t) dt$ لتعبر عن دالة كثافة الاحتمال ودالة التوزيع التجميعي للتوزيع الطبيعي

القياسي. العزوم من الرتبة k للإحصاء الترتيبي من الرتبة r حول الصفر نحصل عليه كالتالي:

$$E(Y_r^k) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_{-\infty}^{\infty} x^k \phi(x) [\Phi(x)]^{r-1} [1-\Phi(x)]^{n-r} dx$$

أيضاً:

$$E(Y_r^k Y_s^m) = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^y x^k y^m \phi(x) \phi(y) [\Phi(x)]^{r-1} [\Phi(y) - \Phi(x)]^{s-r-1} [1-\Phi(y)]^{n-s} dx dy$$

وبوضع $r = n$ يصبح التوقع لـ Y_n هو:

$$E(Y_n) = n \int_{-\infty}^{\infty} x \phi(x) [\Phi(x)]^{n-1} dx$$

وبما أن $x\phi(x) = -\phi'(x)$ فإن:

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= -n \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(x) [\Phi(x)]^{n-1} dx \\ &= -n \left[\phi(x) [\Phi(x)]^{n-1} \right]_{-\infty}^{\infty} + n(n-1) \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(x) [\Phi(x)]^{n-2} dx \\ &= \frac{n(n-1)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} [\Phi(x)]^{n-2} dx. \end{aligned}$$

عندما n صغيرة، فإن التكاملات في التوقع يمكن إيجادها بطرق التحليل العددي وهناك جداول خاصة للعزوم من الرتب الصغيرة. على سبيل المثال Harter (1961) أوجد القيم المتوقعة للإحصاءات الترتيبية للتوزيع الطبيعي وذلك لقيم $n = 2(1)100$.

(٢-٣) بعض العلاقات التكرارية للعزوم

(أ) علاقة تكرارية للعزم من الرتبة k للإحصاء الترتيبي Y_r بدلالة عزوم أكبر الإحصاءات الترتيبية. لتكن $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n$ تمثل الإحصاءات الترتيبية في عينة عشوائية من الحجم n مختارة من توزيع متصل له دالة توزيع تجميعي $F(x)$. المطلوب إثبات أن:

$$E(Y_r^k | n) = n \binom{n-1}{r-1} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n-r}{j} \frac{E(Y_{r+j}^k | r+j)}{r+j}$$

الحل :

$$\therefore E(Y_n^k | n) = n \int_{-\infty}^{\infty} x^k [F(x)]^{n-1} f(x) dx \quad (١٠٣)$$

الآن:

$$\begin{aligned} E(Y_r^k | n) &= n \binom{n-1}{r-1} \int_{-\infty}^{\infty} x^k [F(x)]^{r-1} [1-F(x)]^{n-r} f(x) dx \\ &= n \binom{n-1}{r-1} \sum_{j=0}^{n-r} (-1)^j \binom{n-r}{j} \int_{-\infty}^{\infty} x^k [F(x)]^{r+j-1} f(x) dx \end{aligned} \quad (٢٠٣)$$

ويمكن إثبات أن التكامل السابق يساوي $E(Y_{r+j}^k | r+j) / (r+j)$ وذلك بالاستفادة من (١٠٣). وعلى ذلك:

$$E(Y_r^k | n) = n \binom{n-1}{r-1} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n-r}{j} \frac{E(Y_{r+j}^k | r+j)}{r+j} \quad (٣٠٣)$$

العلاقة السابقة تعطينا علاقة تكرارية للعزوم بدلالة العزوم لأكثر إحصاء ترتيبي. على سبيل المثال بوضع $n=5, r=3, k=1$ نحصل على:

$$E(Y_3 | 5) = 10E(Y_3 | 3) - 15E(Y_4 | 4) + 6E(Y_5 | 5),$$

والتي تعطي التوقعات للوسيط في عينة عشوائية من الحجم $n=5$ بدلالة التوقعات لأكثر الإحصاءات الترتيبية في عينات من الحجم 3, 4, 5.

(ب) علاقة تكرارية للعزم من الرتبة k للإحصاء الترتيبي Y_r بدلالة عزوم أصغر الإحصاءات الترتيبية.

$$\begin{aligned} \therefore [F(x)]^{r-1} &= \{1 - [1 - F(x)]\}^{r-1} \\ &= \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \binom{r-1}{j} [1 - F(x)]^j \end{aligned}$$

وبوضعها في (٢٠٣) نحصل على:

$$\begin{aligned} E(Y_r^k | n) &= n \binom{n-1}{r-1} \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \binom{r-1}{j} \int_{-\infty}^{\infty} x^k [1-F(x)]^{n-r+j} f(x) dx \\ &= n \binom{n-1}{r-1} \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \binom{r-1}{j} \frac{E(Y_{n-r+j+1}^k | n-r+j+1)}{n-r+j+1}. \end{aligned} \quad (٤٠٣)$$

(ج) علاقة تكرارية لتوقع المدى:

عندما يكون n عدد فردي وبوضع $r=k=1$ وإحلال $(2n+1)$ بدلاً من n في (٣٠٣) نحصل على:

$$E(Y_{2n+1} | 2n+1) - E(Y_1 | 2n+1) = (2n+1) \sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^{j+1} \binom{2n}{j} \frac{E(Y_{j+1} | j+1)}{j+1} \quad (٥٠٣)$$

وبنفس الشكل، بوضع $k=1, r=n$ ثم استبدال n بـ $(2n+1)$ في (٤٠٣) نحصل على:

$$E(Y_{2n+1} | 2n+1) - E(Y_1 | 2n+1) = (2n+1) \sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^j \binom{2n}{j} \frac{E(Y_1 | j+1)}{j+1} \quad (٦٠٣)$$

وبجمع (٥٠٣) و (٦٠٣) نحصل على:

$$2E(W | 2n+1) = (2n+1) \sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^{j+1} \binom{2n}{j} \frac{E(W | j+1)}{j+1}$$

وكحالة خاصة عندما $n=1, 2$ حصل على:

$$E(W | 3) = (3/2)E(W | 2),$$

$$E(W | 5) = (5/2)E(W | 4) - (5/3)E(W | 3)$$

على التوالي. النتائج السابقة تتحقق للمجتمعات بدالة احتمال متصلة.

(٣-٣) القيم المتوقعة للفرق بين إحصاءين متتاليين:

عرفنا من قبل المتغير $Y_{r+1} - Y_r$ الذي يمثل الفرق بين إحصاءين ترتبيين متتاليين والآن سنحاول إيجاد التوقع لـ $Y_{r+1} - Y_r$ ، ولا حاجة هنا لإيجاد دالة كثافة الاحتمال له بل سنحتاج لدالة كثافة الاحتمال المشتركة لـ Y_{r+1}, Y_r فقط حيث:

$$g_{r,r+1}(x,y) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r-1)!} f(x) f(y) [F(x)]^{r-1} [1-F(y)]^{n-r-1}$$

$$, \quad -\infty \leq x < y \leq \infty.$$

$$E(Y_{r+1} - Y_r) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r-1)!}$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^y (y-x) f(x) f(y) [F(x)]^{r-1} [1-F(y)]^{n-r-1} dx dy$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) [1-F(y)]^{n-r-1}$$

$$\cdot \int_{-\infty}^y (y-x) f(x) [F(x)]^{r-1} dx dy.$$

ولحساب التكامل $I = \int_{-\infty}^y (y-x) f(x) [F(x)]^{r-1} dx$ بالتجزئ وباختيار:

$$u = y - x, \quad dv = f(x) [F(x)]^{r-1} dx$$

$$du = -dx, \quad v = \frac{1}{r} [F(x)]^r.$$

$$\therefore I = \frac{1}{r} (y-x) [F(x)]^r \Big|_{-\infty}^y + \frac{1}{r} \int_{-\infty}^y [F(x)]^r dx$$

$$= \frac{1}{r} \int_{-\infty}^y [F(x)]^r dx$$

$$= \frac{1}{r} u,$$

$$E(Y_{r+1} - Y_r) = \frac{n!}{r!(n-r-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) [1-F(y)]^{n-r-1} u dx$$

ولتكامل بالتجزئ مرة أخرى باختيار:

$$u = \int_{-\infty}^y [F(x)]^r dx, \quad dv = f(y) [1-F(y)]^{n-r-1},$$

$$du = [F(y)]^r, \quad v = \frac{-1}{n-r} [1-F(y)]^{n-r}.$$

$$\begin{aligned} \therefore E(Y_{r+1} - Y_r) &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \left[-[1-F(y)]^{n-r} \int_{-\infty}^y [F(x)]^r dx \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &\quad + \frac{n!}{r!(n-r)!} \int_{-\infty}^{\infty} [F(y)]^r [1-F(y)]^{n-r} dy \\ E(Y_{r+1} - Y_r) &= \binom{n}{r} \int_{-\infty}^{\infty} [F(y)]^r [1-F(y)]^{n-r} dy. \end{aligned}$$

ويمكن حساب هذا التوقع بطريقة أخرى كالتالي:

$$E(Y_r) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) [F(x)]^{r-1} [1-F(x)]^{n-r} dx.$$

ولنكامل بالتجزئ باختيار:

$$u = x[1-F(x)]^{n-r}, \quad dv = f(x) [F(x)]^{r-1} dx$$

$$\therefore du = [1-F(x)]^{n-r} - (n-r)x f(x) [1-F(x)]^{n-r-1},$$

$$v = \frac{1}{r} [F(x)]^r.$$

$$\begin{aligned} \therefore E(Y_r) &= \frac{n!}{r!(n-r)!} x [F(x)]^r [1-F(x)]^{n-r} \Big|_{-\infty}^{\infty} \\ &\quad + \frac{n!}{r!(n-r-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) [F(x)]^r [1-F(x)]^{n-r-1} dx \\ &\quad - \frac{n!}{r!(n-r)!} \int_{-\infty}^{\infty} [F(x)]^r [1-F(x)]^{n-r} dx \\ &= 0 + E(Y_{r+1}) - \frac{n!}{r!(n-r)!} \int_{-\infty}^{\infty} [F(x)]^r [1-F(x)]^{n-r} dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore E(Y_r) &= E(Y_{r+1}) - \frac{n!}{r!(n-r)!} \int_{-\infty}^{\infty} [F(x)]^r [1-F(x)]^{n-r} dx \\ \Rightarrow E(Y_{r+1} - Y_r) &= \binom{n}{r} \int_{-\infty}^{\infty} [F(y)]^r [1-F(y)]^{n-r} dy. \end{aligned}$$

ويمكن الاستفادة من توقع $Y_{r+1} - Y_r$ لإيجاد توقع المدى للعينة حيث:

$$W = \sum_{r=1}^{n-1} (Y_{r+1} - Y_r).$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow E(W) &= \sum_{r=1}^{n-1} E(Y_{r+1} - Y_r) \\ &= \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} \int_{-\infty}^{\infty} [F(y)]^r [1-F(y)]^{n-r} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} [F(y)]^r [1-F(y)]^{n-r} dy.\end{aligned}$$

ومن نظرية ذى الحدين فإن:

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} [F(y)]^r [1-F(y)]^{n-r} &= [F(y) + 1 - F(y)]^n = 1 \\ \Rightarrow \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} [F(y)]^r [1-F(y)]^{n-r} &= 1 - [F(y)]^n - [1-F(y)]^n \\ \therefore E(W) &= \int_{-\infty}^{\infty} \{1 - [F(y)]^n - [1-F(y)]^n\} dy.\end{aligned}$$

مثال (٣-٣-١):

لتكن X_1, X_2, \dots, X_n عينة عشوائية من الحجم n سحبت من مجتمع له دالة كثافة الاحتمال:

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\left(\frac{x-\eta}{\theta}\right)}, \quad x \geq \eta, \quad \theta > 0$$

أوجد القيمة المتوقعة للإحصاء الترتيبي Y_n .

الحل:

نستخدم العلاقة بين المدى للعينة W والإحصاء Y_n حيث:

$$W = Y_n - Y_1 \Rightarrow Y_n = W + Y_1$$

ولنبداً بإيجاد توقع المدى للعينة W كالتالي:

$$\begin{aligned}\therefore E(Y_{r+1} - Y_r) &= \binom{n}{r} \int_{\eta}^{\infty} [F(y)]^r [1-F(y)]^{n-r} dy \\ &= \binom{n}{r} \int_{\eta}^{\infty} \left[1 - e^{-\left(\frac{y-\eta}{\theta}\right)}\right]^r \left[e^{-\left(\frac{y-\eta}{\theta}\right)}\right]^{n-r} dy.\end{aligned}$$

وبأخذ التعويض:

$$y = e^{-\left(\frac{x-\eta}{\theta}\right)} \Rightarrow dy = -\frac{1}{\theta} y dx.$$

$$\begin{aligned} \therefore E(Y_{r+1} - Y_r) &= \theta \binom{n}{r} \int_0^1 y^{n-r-1} (1-y)^r dy \\ &= \theta \frac{n!}{r!(n-r)!} \frac{r!(n-r-1)!}{n!} \\ &= \frac{\theta}{n-r}. \end{aligned}$$

ومنها يمكن حساب توقع المدى للعينة كالتالي:

$$\begin{aligned} E(W) &= \sum_{r=1}^{n-1} E(Y_{r+1} - Y_r) \\ &= \sum_{r=1}^{n-1} \frac{\theta}{n-r}. \end{aligned}$$

والآن نحتاج لحساب توقع Y_1 ، ونحسبها من دالة كثافة الاحتمال التالية:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= n f(x) [1 - F(y)]^{n-1} \\ &= \frac{n}{\theta} e^{-\left(\frac{x-\eta}{\theta}\right)} \left[e^{-\left(\frac{x-\eta}{\theta}\right)} \right]^{n-1} \\ &= \frac{n}{\theta} e^{-n\left(\frac{x-\eta}{\theta}\right)}, \quad x \geq \eta. \end{aligned}$$

وهذه دالة كثافة الاحتمال لمتغير عشوائي يتبع التوزيع الأسّي بالمعالم $\left(\frac{\theta}{n}, \eta\right)$. $\text{Exp}\left(\frac{\theta}{n}, \eta\right)$. وبالتالي فإن:

$$E(Y_1) = \frac{\theta}{n} + \eta.$$

ومنها نوجد توقع Y_n كالتالي:

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= E(W) + E(Y_1) \\ &= \sum_{r=1}^{n-1} \frac{\theta}{n-r} + \frac{\theta}{n} + \eta \\ &= \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\theta}{n-r} + \eta. \end{aligned}$$

(٣-٤) العزم من الرتبة k للفرق بين إحصاءين متتاليين:

$$\begin{aligned}
E(Y_{r+1} - Y_r)^k &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r-1)!} \\
&\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^y (y-x)^k f(x) f(y) [F(x)]^{r-1} [1-F(y)]^{n-r-1} dx dy \\
&= \frac{n!}{(r-1)!(n-r-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) [1-F(y)]^{n-r-1} \\
&\int_{-\infty}^y (y-x)^k f(x) [F(x)]^{r-1} dx dy.
\end{aligned}$$

ولحساب التكامل $I_1 = \int_{-\infty}^y (y-x)^k f(x) [F(x)]^{r-1} dx$ بالتجزئ وباختيار:

$$u = (y-x)^k, \quad dv = f(x) [F(x)]^{r-1} dx,$$

$$\therefore du = k(y-x)^{k-1} dx, \quad v = \frac{1}{r} [F(x)]^r.$$

$$\therefore I_1 = \frac{1}{r} (y-x)^k [F(x)]^r \Big|_{-\infty}^y + \frac{k}{r} \int_{-\infty}^y (y-x)^{k-1} [F(x)]^r dx$$

$$= \frac{k}{r} \int_{-\infty}^y (y-x)^{k-1} [F(x)]^r dx.$$

$$\therefore E(Y_{r+1} - Y_r)^k = k \frac{n!}{r!(n-r-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^y (y-x)^{k-1} f(y) [1-F(y)]^{n-r-1} [F(x)]^r dx dy$$

$$= k \frac{n!}{r!(n-r-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} [F(x)]^r \int_x^{\infty} (y-x)^{k-1} f(y) [1-F(y)]^{n-r-1} dy dx.$$

ولحساب التكامل $I_2 = \int_x^{\infty} (y-x)^{k-1} f(y) [1-F(y)]^{n-r-1} dy$ بالتجزئ وباختيار:

$$u = (y-x)^{k-1}, \quad dv = f(y) [1-F(y)]^{n-r-1} dy,$$

$$\therefore du = (k-1)(y-x)^{k-2} dy, \quad v = \frac{-[1-F(y)]^{n-r}}{n-r}.$$

$$\begin{aligned}\therefore I_2 &= \frac{-1}{n-r} (y-x)^{k-1} [1-F(y)]^{n-r} \Big|_x^\infty \\ &\quad + \frac{k-1}{n-r} \int_x^\infty (y-x)^{k-2} [1-F(y)]^{n-r} dy \\ &= \frac{k-1}{n-r} \int_x^\infty (y-x)^{k-2} [1-F(y)]^{n-r} dy.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore E(Y_{r+1} - Y_r)^k &= k(k-1) \frac{n!}{r!(n-r)!} \int_{-\infty}^\infty [F(x)]^r \int_x^\infty (y-x)^{k-2} [1-F(y)]^{n-r} dy dx \\ &= k(k-1) \binom{n}{r} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^y (y-x)^{k-2} [F(x)]^r [1-F(y)]^{n-r} dx dy.\end{aligned}$$

وعند وضع $k = 2, 3, 4$ نحصل على:

$$E(Y_{r+1} - Y_r)^2 = 2 \binom{n}{r} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^y [F(x)]^r [1-F(y)]^{n-r} dx dy,$$

$$E(Y_{r+1} - Y_r)^3 = 6 \binom{n}{r} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^y (y-x) [F(x)]^r [1-F(y)]^{n-r} dx dy,$$

$$E(Y_{r+1} - Y_r)^4 = 12 \binom{n}{r} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^y (y-x)^2 [F(x)]^r [1-F(y)]^{n-r} dx dy.$$

(٥-٣) حساب $E(Y_{r+1}^2) - E(Y_r^2)$ لبعض التوزيعات:

مثال (٥-٣-١):

أحسب التوقع $E(Y_{r+1}^2 - Y_r^2)$ لعينة تتبع التوزيع الأسّي بمعلمة θ .

الحل:

$$E(Y_r^2) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_{-\infty}^\infty x^2 f(x) [F(x)]^{r-1} [1-F(x)]^{n-r} dx.$$

ولنكامل بالتجزئ وباختيار:

$$u = x^2 [1-F(x)]^{n-r}, \quad dv = f(x) [F(x)]^{r-1} dx,$$

$$du = 2x [1-F(x)]^{n-r} - (n-r)x^2 f(x) [1-F(x)]^{n-r-1},$$

$$v = \frac{1}{r} [F(x)]^r,$$

$$\begin{aligned}
 E(Y_r^2) &= \frac{n!}{r!(n-r)!} x^2 [F(x)]^r [1-F(x)]^{n-r} \Big|_{-\infty}^{\infty} \\
 &\quad + \frac{n!}{r!(n-r-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) [F(x)]^r [1-F(x)]^{n-r-1} dx \\
 &\quad - \frac{2n!}{r!(n-r)!} \int_{-\infty}^{\infty} x [F(x)]^r [1-F(x)]^{n-r} dx \\
 &= 0 + E(Y_{r+1}^2) - \frac{2n!}{r!(n-r)!} \int_{-\infty}^{\infty} x [F(x)]^r [1-F(x)]^{n-r} dx. \\
 \therefore E(Y_r^2) &= E(Y_{r+1}^2) - \frac{2n!}{r!(n-r)!} \int_{-\infty}^{\infty} x [F(x)]^r [1-F(x)]^{n-r} dx \\
 E(Y_{r+1}^2 - Y_r^2) &= \frac{2n!}{r!(n-r)!} \int_{-\infty}^{\infty} x [F(x)]^r [1-F(x)]^{n-r} dx.
 \end{aligned}$$

وعندما تكون العينة مسحوبة من توزيع أسّي فإن:

$$\begin{aligned}
 E(Y_{r+1}^2 - Y_r^2) &= \frac{2n!}{r!(n-r)!} \int_{-\infty}^{\infty} x [1 - e^{-x/\theta}]^r [e^{-x/\theta}]^{n-r} dx \\
 &= \frac{2n!}{r!(n-r)!} \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^j \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-(n-r+j)x/\theta} dx \\
 &= \frac{2n!}{r!(n-r)!} \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^j \frac{\theta^2}{(n-r+j)^2}.
 \end{aligned}$$

مثال (٣-٥-٢):

ليكن:

$$f(x) = \begin{cases} x e^{-\frac{1}{2}x^2}, & 0 < x < \infty \\ 0, & \text{e.w.} \end{cases}$$

$$\text{أثبت أن } E(Y_{r+1}^2) - E(Y_r^2) = \frac{2}{n-r}.$$

الحل :

دالة كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبي من الرتبة r هي:

$$g_r(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \left(1 - e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)^{r-1} \left(e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)^{n-r} \cdot x e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

$$\begin{aligned}
 \therefore E(Y_r^2) &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_0^\infty x^3 \left(1 - e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)^{r-1} \left(e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)^{n-r} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\
 &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_0^\infty x^3 \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i \binom{r-1}{i} e^{-\frac{1}{2}x^2(n-r+i+1)} dx \\
 &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i \binom{r-1}{i} \int_0^\infty x^3 e^{-\frac{1}{2}x^2(n-r+i+1)} dx \\
 &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i \binom{r-1}{i} \int_0^\infty x^2 d \left\{ \frac{-e^{-\frac{1}{2}x^2(n-r+i+1)}}{n-r+i+1} \right\} \\
 &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i \binom{r-1}{i} \left[\frac{-x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2(n-r+i+1)}}{n-r+i+1} \right]_0^\infty + \\
 &\quad \left[\frac{2}{n-r+i+1} \int_0^\infty x e^{-\frac{1}{2}x^2(n-r+i+1)} dx \right] \\
 &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i \binom{r-1}{i} \frac{2}{(n-r+i+1)^2}.
 \end{aligned}$$

وبنفس الشكل:

$$E(Y_{r+1}^2) = \frac{n!}{r!(n-r-1)!} \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{i} \frac{2}{(n-r+i)^2}$$

أو يمكن كتابة التوقعين السابقين كالتالي:

$$E(Y_r^2) = \frac{2n!}{r!(n-r)!} \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i \frac{r!}{i!(r-i-1)!} \cdot \frac{1}{(n-r+i+1)^2},$$

$$E(Y_{r+1}^2) = \frac{2n!}{r!(n-r)!} \left[\sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i \frac{r!(n-r)}{i!(r-i)!} \cdot \frac{1}{(n-r+i)^2} + (-1)^r \frac{(n-r)}{n^2} \right].$$

$$\begin{aligned}
 \therefore E(Y_{r+1}^2) - E(Y_r^2) &= \frac{2n!}{r!(n-r)!} \left\{ \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i \frac{r!}{i!(r-i-1)!} \left[\frac{(n-r)}{r-i} \frac{1}{(n-r+i)^2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{(n-r+i+1)^2} \right] + (-1)^r \frac{(n-r)}{n^2} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2n!}{r!(n-r)!} \left[\frac{1}{n-r} - \binom{r}{1} \frac{1}{n-r+1} + \cdots + (-1)^r \frac{1}{n} \right] \\
 &= \frac{2n!}{r!(n-r)!} \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{i} \frac{1}{n-r+i} \\
 &= \frac{2n!}{r!(n-r)!} \int_0^1 \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{i} y^{n-r+i-1} dy \\
 &= \frac{2n!}{r!(n-r)!} \int_0^1 y^{n-r-1} (1-y)^r dy \\
 &= \frac{2n!}{r!(n-r)!} B(n-r, r+1) = \frac{2}{n-r}.
 \end{aligned}$$

(٦-٣) عزوم الإحصاءين W, W' :

في هذا القسم سوف نوجد العزوم لإحصاءين مهمين في النواحي التطبيقية وهما:

$$W = nF(Y_r),$$

$$W' = n[1 - F(Y_{n-r+1})].$$

في البدء نوجد دالة كثافة الاحتمال لـ W بالاعتماد على دالة الكثافة للإحصاء Y_r حيث:

$$g_r(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} f(x) [F(x)]^{r-1} [1-F(x)]^{n-r}.$$

وبأخذ التحويل:

$$w = nF(x) \Rightarrow \left| \frac{dx}{dw} \right| = \frac{1}{nf(x)}.$$

وبالتالي فإن دالة كثافة الاحتمال للمتغير W هي:

$$g(w) = \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} \left(\frac{w}{n} \right)^{r-1} \left(1 - \frac{w}{n} \right)^{n-r}, \quad 0 < w < n,$$

وبالمثل إذا أردنا إيجاد دالة كثافة الاحتمال لـ W' بالاعتماد على دالة الكثافة للإحصاء Y_{n-r+1} فإن:

$$g_{n-r+1}(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} f(x) [F(x)]^{n-r} [1-F(x)]^{r-1}.$$

وبأخذ التحويل:

$$w' = n[1 - F(x)] \Rightarrow \left| \frac{dx}{dw'} \right| = \frac{1}{nf(x)},$$

وبالتالي فإن دالة كثافة الاحتمال للمتغير W' هي:

$$g(w') = \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} \left(1 - \frac{w'}{n}\right)^{n-r} \left(\frac{w'}{n}\right)^{r-1}, \quad 0 < w' < n.$$

مما يعني أن لهما نفس دالة الكثافة وبالتالي سيكون لهما نفس العزوم.

$$E(W^k) = \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} \int_0^n w^k \left(\frac{w}{n}\right)^{r-1} \left(1 - \frac{w}{n}\right)^{n-r} dw.$$

وبالتعويض:

$$t = \frac{w}{n} \Rightarrow w = nt, \quad dw = n dt.$$

$$\begin{aligned} \therefore E(W^k) &= \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} \int_0^1 (nt)^k t^{r-1} (1-t)^{n-r} n dt \\ &= \frac{n! n^k}{(r-1)!(n-r)!} \int_0^1 t^{k+r-1} (1-t)^{n-r} dt \\ &= \frac{n! n^k}{(r-1)!(n-r)!} \frac{(k+r-1)!(n-r)!}{(n+k)!} \\ &= n^k \frac{n!(k+r-1)!}{(r-1)!(n+k)!}. \end{aligned}$$

وهي نفسها عزوم W' ، وبوضع $k=1,2,3,4$ نحصل على:

$$k=1 \Rightarrow E(W) = \frac{nr}{(n+1)},$$

$$k=2 \Rightarrow E(W^2) = n^2 \frac{r(r+1)}{(n+1)(n+2)},$$

$$k=3 \Rightarrow E(W^3) = n^3 \frac{r(r+1)(r+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)},$$

$$k=4 \Rightarrow E(W^4) = n^4 \frac{r(r+1)(r+2)(r+3)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)},$$

كما يمكن إيجاد توزيع تقريبي لـ W و W' عندما تكون n كبيرة كالتالي:

$$\begin{aligned} g(w) &= \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} \left(\frac{w}{n}\right)^{r-1} \left(1 - \frac{w}{n}\right)^{n-r} \\ &= \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{(r-1)!n^{r-1}} w^{r-1} \left(1 - \frac{w}{n}\right)^{-r} \left(1 - \frac{w}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

$$\therefore g(w) = \frac{1}{(r-1)!} \left(\frac{n-1}{n} \right) \left(\frac{n-2}{n} \right) \dots \left(\frac{n-(r-1)}{n} \right) w^{r-1} \left(1 - \frac{w}{n} \right)^{-r} \left(1 - \frac{w}{n} \right)^n.$$

وبأخذ النهاية للطرفين عندما $n \rightarrow \infty$ فإن:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(w) = \frac{1}{(r-1)!} w^{r-1} e^{-w}.$$

حيث :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{w}{n} \right)^{-r} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{w}{n} \right)^n = e^{-w}.$$

أي أن المتغيران W و W' يتبعان تقريباً توزيع جاما بالمعالم $k = r, \theta = 1$.

كذلك يمكن إيجاد العزوم المشتركة لـ W, W' ، ونبدأ بإيجاد دالة كثافة الاحتمال المشتركة لهما

من دالة كثافة الاحتمال المشتركة للإحصاءين Y_r, Y_{n-r+1} حيث:

$$g_{r,n-r+1}(x,y) = C f(x) f(y) [F(x)]^{r-1} [F(y) - F(x)]^{n-2r} [1 - F(y)]^{r-1}, \quad -\infty < x < y < \infty.$$

حيث :

$$C = \frac{n!}{[(r-1)!]^2 (n-2r)!}, \quad \text{وباستخدام التحويل:}$$

$$w = nF(x) \quad , \quad w' = n[1 - F(y)].$$

وجاكوبيان التحويل هو:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial x}{\partial w'} \\ \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{nf(x)} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{nf(y)} \end{vmatrix} = \frac{-1}{n^2 f(x) f(y)},$$

ومنه دالة الكثافة المشتركة لـ W, W' هي:

$$g(w, w') = \frac{C}{n^2} \left(\frac{w}{n} \right)^{r-1} \left(\frac{w'}{n} \right)^{r-1} \left[1 - \frac{w + w'}{n} \right]^{n-2r}, \quad 0 < w, w', w + w' < n.$$

ومنها يمكن حساب العزوم المشتركة كالتالي:

$$E[W^k (W')^s] = \frac{C}{n^2} \int_0^n \int_0^{n-w'} w^k (w')^s \left(\frac{w}{n} \right)^{r-1} \left(\frac{w'}{n} \right)^{r-1} \left[1 - \frac{w + w'}{n} \right]^{n-2r} dw dw'.$$

وبالتعويض:

$$\begin{aligned}
z &= \frac{w}{n}, & t &= \frac{w'}{n}, \\
dz &= \frac{dw}{n}, & dt &= \frac{dw'}{n}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore E[W^k (W')^s] &= C n^{k+s} \int_0^1 \int_0^{1-t} z^{k+r-1} t^{s+r-1} (1-t-z)^{n-2r} dz dt \\
&= C n^{k+s} \int_0^1 \int_0^{1-t} z^{k+r-1} t^{s+r-1} \sum_{j=0}^{n-2r} \binom{n-2r}{j} (-1)^j (1-t)^{n-2r-j} z^j dz dt \\
&= C n^{k+s} \sum_{j=0}^{n-2r} \binom{n-2r}{j} (-1)^j \int_0^1 t^{s+r-1} (1-t)^{n-2r-j} \int_0^{1-t} z^{k+r+j-1} dz dt \\
&= C n^{k+s} \sum_{j=0}^{n-2r} \binom{n-2r}{j} (-1)^j \int_0^1 t^{s+r-1} (1-t)^{n-2r-j} \frac{(1-t)^{k+r+j}}{k+r+j} dt \\
&= C n^{k+s} \sum_{j=0}^{n-2r} \binom{n-2r}{j} (-1)^j \frac{1}{k+r+j} \int_0^1 t^{s+r-1} (1-t)^{n-r+k} dt \\
&= C n^{k+s} \sum_{j=0}^{n-2r} \binom{n-2r}{j} (-1)^j \frac{1}{k+r+j} \int_0^1 t^{s+r-1} (1-t)^{n-r+k} dt \\
&= C n^{k+s} B(s+r, n-r+k+1) \sum_{j=0}^{n-2r} \binom{n-2r}{j} \frac{(-1)^j}{k+r+j} \\
&= C n^{k+s} B(s+r, n-r+k+1) \sum_{j=0}^{n-2r} \binom{n-2r}{j} (-1)^j \int_0^1 x^{k+r+j-1} dx \\
&= C n^{k+s} B(s+r, n-r+k+1) \int_0^1 x^{k+r-1} \sum_{j=0}^{n-2r} \binom{n-2r}{j} (-1)^j x^j dx \\
&= C n^{k+s} B(s+r, n-r+k+1) \int_0^1 x^{k+r-1} (1-x)^{n-2r} dx \\
&= C n^{k+s} B(s+r, n-r+k+1) \beta(k+r, n-2r+1).
\end{aligned}$$

وكحالة خاصة عندما $k=s=1$ فإن:

$$E(WW') = \frac{r^2 n^2}{(n+1)(n+2)}.$$

وتكمن أهمية المتغيرات W, W' في أنه من السهل حساب عزومهما ويمكن استخدامها في حساب عزوم الإحصاءات الترتيبية كما في المثال التالي:

مثال (٣-٦-١):

لتكن X_1, X_2, \dots, X_n عينة عشوائية من الحجم n سحبت من مجتمع له دالة كثافة الاحتمال:

$$f(x) = \frac{1}{2a}, \quad -a < x < a,$$

$$= 0, \quad \text{e.w.}$$

ومنها يمكن حساب دالة التوزيع:

$$F(x) = 0, \quad x \leq -a,$$

$$= \frac{x}{2a} + \frac{1}{2}, \quad -a < x < a,$$

$$= 1, \quad x \geq a.$$

ولنفرض أن :

$$W = nF(Y_r) \Rightarrow W = n \left(\frac{Y_r}{2a} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\Rightarrow Y_r = a \left(\frac{2W}{n} - 1 \right).$$

ومنها نوجد عزوم الإحصاء Y_r كالتالي:

$$E(Y_r) = a \left(\frac{2E(W)}{n} - 1 \right)$$

$$= a \left(\frac{2}{n} \frac{nr}{(n+1)} - 1 \right)$$

$$= a \left(\frac{2r}{(n+1)} - 1 \right),$$

$$E(Y_r^2) = a^2 E \left(\frac{2W}{n} - 1 \right)^2$$

$$= a^2 E \left(\frac{4W^2}{n^2} - \frac{4W}{n} + 1 \right)$$

$$= a^2 \left(\frac{4E(W^2)}{n^2} - \frac{4E(W)}{n} + 1 \right)$$

$$= a^2 \left(\frac{4}{n^2} \frac{n^2 r(r+1)}{(n+1)(n+2)} - \frac{4}{n} \frac{nr}{(n+1)} + 1 \right)$$

$$= a^2 \left(\frac{4r(r+1)}{(n+1)(n+2)} - \frac{4r}{(n+1)} + 1 \right).$$

وبالمثل يمكن حساب:

$$E(Y_r^3) = a^3 \left(\frac{8r(r+1)(r+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{12r(r+1)}{(n+1)(n+2)} + \frac{6r}{(n+1)} - 1 \right),$$

$$E(Y_r^4) = a^4 \left(\frac{16r(r+1)(r+2)(r+3)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} - \frac{32r(r+1)(r+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{24r(r+1)}{(n+1)(n+2)} - \frac{8r}{(n+1)} + 1 \right)$$

وكحالة خاصة عندما $r = n$ فإن:

$$\mu'_1 = E(Y_n) = a \left(\frac{n-1}{n+1} \right),$$

$$\mu'_2 = E(Y_n^2) = a^2 \left(\frac{n^2 - n + 2}{(n+1)(n+2)} \right),$$

$$\mu'_3 = E(Y_n^3) = a^3 \left(\frac{n^3 + 12n^2 - 14n - 3}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right),$$

$$\mu'_4 = E(Y_n^4) = a^4 \left(\frac{360 - 114n - 59n^2 - 18n^3 - n^4}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \right).$$

ويمكن حساب العزوم حول المتوسط من العلاقة بينها وبين العزوم حول الصفر ومن ثم نوجد منها معامل الالتواء والتفلطح.

(٧-٣) علاقة عامة لعزوم الإحصاءات الترتيبية:

ليكن:

$$v_k(Y_r | n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k h_r(x | n) dx$$

$$h_r(x | n) = f(x) [F(x)]^{r-1} [1 - F(x)]^{n-r}.$$

وعلى ذلك فإن:

$$\begin{aligned} v_k(Y_r | n-1) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) [F(x)]^{r-1} [1 - F(x)]^{n-r-1} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) [F(x)]^{r-1} [1 - F(x)]^{n-r-1} [F(x) + 1 - F(x)] dx. \end{aligned}$$

وبوضع $t = 1$ نحصل على العلاقة:

$$v_k(Y_r|n-1) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) [F(x)]^r [1-F(x)]^{n-r-1} dx \\ + \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) [F(x)]^{r-1} [1-F(x)]^{n-r} dx,$$

$$v_k(Y_r|n-1) = v_k(Y_{r+1}|n) + v_k(Y_r|n).$$

وبوضع $t=2$ فإن:

$$v_k(Y_r|n-1) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) [F(x)]^{r+1} [1-F(x)]^{n-r-1} dx \\ + 2 \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) [F(x)]^r [1-F(x)]^{n-r} dx \\ + \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) [F(x)]^{r-1} [1-F(x)]^{n-r+1} dx$$

$$v_k(Y_r|n-1) = v_k(Y_{r+2}|n+1) + 2v_k(Y_{r+1}|n+1) + v_k(Y_r|n+1),$$

ويمكن استخدام العلاقات السابقة لإيجاد علاقة بين عزوم الإحصاءات الترتيبية حيث إن دالة

كثافة الاحتمال للإحصاء Y_r هي:

$$g_r(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} h_r(x|n) \\ \therefore \mu'_k(Y_r|n) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} v_k(Y_r|n) \\ = \frac{1}{B(r, n-r+1)} v_k(Y_r|n).$$

وبالتالي نحصل على العلاقة:

$$B(r, n-r) \mu'_k(Y_r|n-1) \\ = B(r+1, n-r) \mu'_k(Y_{r+1}|n) + B(r, n-r+1) \mu'_k(Y_r|n).$$

وبالمثل يمكن إيجاد العلاقة بين العزوم المشتركة بتعريف:

$$v_{k,m}(Y_r, Y_s|n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^y x^k y^m f(x) f(y) [F(x)]^{r-1} \\ [F(y) - F(x)]^{s-r-1} [1-F(y)]^{n-s} dx dy.$$

وبضرب الطرف الأيمن بالمقدار:

$$[F(x) + (F(y) - F(x)) + (1 - F(y))]^t.$$

وعندما $t=1$ سنحصل على:

$$v_{k,m}(Y_r, Y_s | n) = v_{k,m}(Y_{r+1}, Y_{s+1} | n+1) \\ + v_{k,m}(Y_r, Y_{s+1} | n+1) + v_{k,m}(Y_r, Y_s | n+1),$$

وبما أن:

$$E(Y_r^k Y_s^m) = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} v_{k,m}(Y_r, Y_s)$$

فإن:

$$v_{k,m}(Y_r, Y_s | n) = B(r, s-r, n-s+1) \mu'_{k,m}(Y_r, Y_s | n).$$

حيث:

$$B(a, b, c) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(a+b+c)}.$$

(٨-٣) القيمة المتوقعة للإحصاء الترتيبي من الرتبة r في عينة من الحجم m حيث $n \geq m$:

$$E(Y_r | m) = r \binom{m}{r} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) [F(x)]^{r-1} [1-F(x)]^{m-r} dx \\ = \int_{-\infty}^{\infty} x r \binom{m}{r} f(x) [F(x)]^{r-1} [1-F(x)]^{m-r} \{F(x) + [1-F(x)]\}^{n-m} dx \\ = \int_{-\infty}^{\infty} x r \binom{m}{r} f(x) [F(x)]^{r-1} [1-F(x)]^{m-r} \\ \cdot \sum_{i=0}^{n-m} \frac{(n-m)!}{(n-m-i)! i!} [F(x)]^i [1-F(x)]^{n-m-i} dx \\ = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \sum_{i=0}^{n-m} \frac{(n-r-i)!}{(m-r)!(n-m-i)!} \cdot \frac{(r+i-1)!}{i!(r-1)!} \cdot \frac{n!}{(r+i-1)!(n-r-i)!} \\ \cdot \frac{m!(n-m)!}{n!} [F(x)]^{r+i-1} [1-F(x)]^{n-r-i} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=0}^{n-m} \frac{\binom{n-r-i}{m-r} \binom{r+i-1}{i}}{\binom{n}{m}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n!}{(r+i-1)!(n-r-i)!} x f(x) \\
 &\quad \cdot [F(x)]^{r+i-1} [1-F(x)]^{n-r-i} dx \\
 &= \sum_{i=0}^{n-m} \frac{\binom{n-r-i}{m-r} \binom{r+i-1}{i}}{\binom{n}{m}} E(Y_{r+i}|n), n \geq m
 \end{aligned}$$

(٩-٣) العلاقات التكرارية بين القيم المتوقعة لبعض الدوال في الإحصاءات الترتيبية:

من نظرية (١-٧-١) أثبتنا العلاقة التكرارية التالية:

$$g_{r+1,n}(x) = \frac{n}{r} g_{r,n-1}(x) - \frac{n-r}{r} g_{r,n}(x).$$

بضرب كلا الطرفين بالدالة المعطاة في x ، ولتكن $\varphi(x)$ واخذ التكامل على كل قيم x ، فإننا نصل إلى العلاقة التالية بين القيم المتوقعة للدوال $\varphi(Y_{r+1}|n), \varphi(Y_r|n-1), \varphi(Y_r|n)$:

$$E[\varphi(Y_{r+1}|n)] = \frac{n}{r} E[\varphi(Y_r|n-1)] - \frac{n-r}{r} [\varphi(Y_r|n)].$$

العلاقة التكرارية السابقة تعطي القيمة المتوقعة لدالة معطاة في الإحصاء الترتيبي من الرتبة $r+1$ في عينة عشوائية من الحجم n بدلالة القيم المتوقعة لنفس الدالة في الإحصاء الترتيبي من الرتبة r في عينات عشوائية من الحجم n و $n-1$.

وكحالة خاصة عندما $\varphi(x) = x^k$ فإننا نحصل على:

$$E[\varphi(Y_{r+1}^k|n)] = \frac{n}{r} E[\varphi(Y_r^k|n-1)] - \frac{n-r}{r} [\varphi(Y_r^k|n)].$$

(١٠-٣) التحقق من المتوسطات لأصغر الإحصاءات الترتيبية في عينات من الحجم n مختارة من توزيع متماثل:

بما أن التوزيع المختار منه العينة متماثل، فإن $F(x)$ يمكن كتابتها كالتالي:

$$F(x) = \frac{1}{2} + g(x),$$

$$1 - F(x) = \frac{1}{2} - g(x)$$

وعلى ذلك:

$$F(x)[1 - F(x)] = \frac{1}{4} - [g(x)]^2$$

وهذا يعني أن $F(x)[1 - F(x)]$ دالة زوجية وعلى ذلك:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \{F(x)[1 - F(x)]\}^{n-1} f(x) dx = 0.$$

وبالتالي فإن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \{1 - [1 - F(x)]\}^{n-1} [1 - F(x)]^{n-1} f(x) dx = 0.$$

أو يمكن كتابته بالصورة

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} x \{1 - [1 - F(x)]\}^{n-1} [1 - F(x)]^{n-1} f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{j} [1 - F(x)]^j [1 - F(x)]^{n-1} f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{j} [1 - F(x)]^{n+j-1} f(x) dx \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{j} \int_{-\infty}^{\infty} x [1 - F(x)]^{n+j-1} f(x) dx = 0. \end{aligned}$$

ولكن لعينات من الحجم n فإن دالة كثافة الاحتمال لأصغر الإحصاءات الترتيبية هي:

$$g_1(x) = n [1 - F(x)]^{n-1} f(x),$$

$$E(Y_1|n) = n \int_{-\infty}^{\infty} x [1 - F(x)]^{n-1} f(x) dx.$$

$$\begin{aligned} \therefore E(Y_1|n+j) &= (n+j) \int_{-\infty}^{\infty} x [1 - F(x)]^{n+j-1} f(x) dx \\ &= \mu'_1(Y_1|n+j). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{j} \int_{-\infty}^{\infty} x [1 - F(x)]^{n+j-1} f(x) dx \\ = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{j} \frac{1}{(n+j)} \mu'_1(Y_1|n+j) = 0. \end{aligned}$$

وهذا يعني أن:

$$\frac{1}{n}\mu'_1(Y_1|n) - \frac{n-1}{n+1}\mu'_1(Y_1|n+1) + \dots + \frac{1}{2n-1}\mu'_1(Y_1|2n-1) = 0.$$

والذي يعطي تحقق من المتوسطات لأصغر الإحصاءات الترتيبية في عينات مختارة من توزيع متماثل.

(٣-١١) العزوم التقريبية للإحصاءات الترتيبية للعينات الكبيرة:

إن تقدير العزوم المضبوطة للإحصاء الترتيبي Y_r مباشرة من دالة كثافة الاحتمال يتطلب تحليل عددي للتكاملات لكثير من $F(x)$ والتي لها أهمية في التطبيقات. يعتبر الإحصاء الترتيبي من الرتبة r دالة في الترتيب الإحصائي من توزيع منتظم وذلك من نظرية التحويل التكاملي. بفرض أن $U_{(r)}$ هي الإحصاء الترتيبي من توزيع منتظم في الفترة $(0,1)$. العلاقة بين $U_{(r)}$ و Y_r تأخذ الشكل التالي:

$$U_{(r)} = F(Y_r).$$

وعلى ذلك:

$$Y_r = F^{-1}(U_{(r)}) = g(U_{(r)}).$$

ومن السهل الحصول على العزوم للإحصاء $U_{(r)}$. وبالتالي يمكن الحصول على عزوم الإحصاء Y_r كالتالي:

$$E(Y_r) = E(F^{-1}(U_{(r)})) = E(g(U_{(r)})).$$

ولنفرض إن $\mu = E(U_r)$ وسنستخدم مفكوك تايلور للدالة $g(z)$ حول μ وهو:

$$g(z) = g(\mu) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(z-\mu)^i}{i!} g^{(i)}(\mu),$$

حيث:

$$g^{(i)}(\mu) = \left. \frac{d^i g(z)}{dz^i} \right|_{z=\mu}$$

وهذه المتسلسلة تقاربية عندما:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(z-\mu)^n}{n!} g^{(i)}(z_1) = 0, \quad \mu < z_1 < z.$$

وبكتابة الدالة $g(z)$ لأي متغير عشوائي Z له متوسط μ ، وبأخذ التوقع نحصل على:

$$E(g(Z)) = g(\mu) + \frac{1}{2} \text{Var}(Z) g''(\mu) + \sum_{i=3}^{\infty} \frac{E(Z-\mu)^i}{i!} g^{(i)}(\mu).$$

ومن النتيجة السابقة يمكننا الحصول على تقريبان لـ $E(g(Z))$ وهما:

$$(1) \quad E(g(Z)) \approx g(\mu),$$

$$(2) \quad E(g(Z)) \approx g(\mu) + \frac{1}{2} \text{Var}(Z) g''(\mu).$$

وبطرح $E(g(Z))$ من $g(Z)$ ثم التربيع وأخذ التوقع سنحصل على تقريب للتباين كالتالي:

$$(3) \quad E[g(Z) - E(g(Z))]^2 \approx \text{Var}(Z)(g'(\mu))^2.$$

وإذا وضعنا $Z = U_r$ في النتائج الثلاث السابقة نحصل على:

$$(1) \quad E(g(U_r)) \approx g(E(U_r)),$$

$$(2) \quad E(g(U_r)) \approx g(E(U_r)) + \frac{1}{2} \text{Var}(U_r) g''(E(U_r)),$$

$$(3) \quad E[g(U_r) - E(g(U_r))]^2 \approx \text{Var}(U_r)(g'(E(U_r)))^2.$$

وقد علمنا سابقاً إن U_r متغير عشوائي يتبع توزيع بيتا وله المتوسط والتباين كالتالي:

$$E(U_r) = \frac{r}{n+1}, \quad \text{Var}(U_r) = \frac{r(n-r+1)}{(n+1)^2(n+2)}.$$

بينما:

$$g(U_r) = F^{-1}(U_r) = Y_r,$$

$$g'(U_r) = \frac{d}{dU_r} F^{-1}(U_r)$$

$$= \left(\frac{dF(Y_r)}{dY_r} \right)^{-1}$$

$$= (f(Y_r))^{-1}$$

$$= (f(F^{-1}(U_r)))^{-1}.$$

$$\therefore g''(U_r) = \frac{d}{dU_r} (f(Y_r))^{-1}$$

$$= -(f(Y_r))^{-2} f'(Y_r) \frac{dY_r}{dU_r}$$

$$= -(f(Y_r))^{-2} f'(Y_r) \frac{d}{dU_r} (F^{-1}(U_r))$$

$$= -(f(Y_r))^{-2} f'(Y_r) (f(Y_r))^{-1}$$

$$= -f'(Y_r) (f(Y_r))^{-3}$$

$$= -f'(F^{-1}(U_r)) [f(F^{-1}(U_r))]^{-3}.$$

وبوضع:

$$U_r = \mu = \frac{r}{n+1}$$

نحصل على:

$$g'(\mu) = \left\{ f \left[F^{-1} \left(\frac{r}{n+1} \right) \right] \right\}^{-1},$$

$$g''(U_r) = - \left\{ f' \left[F^{-1} \left(\frac{r}{n+1} \right) \right] \right\} \left\{ f \left[F^{-1} \left(\frac{r}{n+1} \right) \right] \right\}^{-3}$$

وبذلك تصبح التقريبات كالتالي:

$$(1) \quad E(Y_r) = E(g(U_r)) \approx F^{-1} \left(\frac{r}{n+1} \right),$$

$$(2) \quad E(Y_r) = E(g(U_r)) \approx F^{-1} \left(\frac{r}{n+1} \right)$$

$$- \frac{r(n-r+1)}{2(n+1)^2(n+2)} \left\{ f' \left[F^{-1} \left(\frac{r}{n+1} \right) \right] \right\} \left\{ f \left[F^{-1} \left(\frac{r}{n+1} \right) \right] \right\}^{-3}$$

$$(3) \quad \text{Var}(Y_r) = E[g(U_r) - E(g(U_r))]^2 \approx \frac{r(n-r+1)}{(n+1)^2(n+2)} \left\{ f \left[F^{-1} \left(\frac{r}{n+1} \right) \right] \right\}^{-2}.$$

ويمكن أن تستخدم النتائج السابقة في تقدير التوقع والتباين للإحصاء Y_r عندما تكون f, F موضوعة في جداول مثل التوزيع الطبيعي.

مثال (٣-١١-١):

بفرض إننا نرغب في إيجاد تقريب لمتوسط وتباين الإحصاء Y_4 من عينة عشوائية حجمها $n=19$ مسحوبة من توزيع طبيعي قياسي $N(0,1)$.

الحل:

$$E(Y_4) = \Phi^{-1} \left(\frac{4}{20} \right) = \Phi^{-1}(0.2) = -0.84.$$

حيث $\Phi(0.2)$ نحصل عليها من جدول التوزيع الطبيعي القياسي في ملحق (٢).

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(Y_4) &\approx \frac{r(n-r+1)}{(n+1)^2(n+2)} \left\{ \phi \left[\Phi^{-1} \left(\frac{r}{n+1} \right) \right] \right\}^{-2} \\
 &= \frac{(4)(16)}{(20)^2(21)} \left\{ \phi \left[\Phi^{-1}(0.2) \right] \right\}^{-2} \\
 &= \frac{(4)(16)}{(20)^2(21)} [\phi(-0.84)]^{-2} \\
 &= \frac{(4)(16)}{(20)^2(21)} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(0.84)^2} \right]^{-2} \\
 &= \frac{(4)(16)}{(20)^2(21)} [0.2803]^{-2} \\
 \therefore \text{Var}(Y_4) &\approx 0.097.
 \end{aligned}$$

وبالنسبة للوسيط عندما يكون العدد $n = 2m + 1$ فردي فإن الوسيط هو الإحصاء الترتيبي رقم $m + 1$ وعلى ذلك:

$$E(Y_{m+1}) \approx F^{-1} \left(\frac{m+1}{2m+1+1} \right) = F^{-1} \left(\frac{1}{2} \right).$$

مثال (٣-١١-٢):

إذا كانت العينة مسحوبة من مجتمع له دالة كثافة احتمال

$$f(x) = \frac{b}{\theta} x^{b-1} e^{-\frac{x^b}{\theta}}, \quad x > 0.$$

أوجد تقريب لتوقع الإحصاء Y_r حيث $n = 19$.

الحل:

$$E(Y_r) \approx F^{-1} \left(\frac{r}{n+1} \right),$$

$$\text{Var}(Y_r) \approx \frac{r(n-r+1)}{(n+1)^2(n+2)} \left\{ f \left[F^{-1} \left(\frac{r}{n+1} \right) \right] \right\}^{-2}.$$

وحيث إن:

$$\begin{aligned}
 U_r = F(y) = 1 - e^{-\frac{y^b}{\theta}} &\Rightarrow e^{-\frac{y^b}{\theta}} = 1 - U_r \\
 &\Rightarrow \frac{y^b}{\theta} = -\ln(1 - U_r) \\
 &\Rightarrow y^b = -\theta \ln(1 - U_r) \\
 &\Rightarrow y = F^{-1}(U_r) = (-\theta \ln(1 - U_r))^{\frac{1}{b}}.
 \end{aligned}$$

$$E(Y_r) \approx \left(-\theta \ln \left(1 - \frac{r}{20} \right) \right)^{\frac{1}{b}},$$

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(Y_r) &\approx \frac{r(20-r)}{(20)^2(21)} \left\{ f \left(-\theta \ln \left(1 - \frac{r}{20} \right) \right)^{\frac{1}{b}} \right\}^{-2} \\
 &= \frac{r(20-r)}{(20)^2(21)} \left\{ \frac{b}{\theta} \left(-\theta \ln \left(1 - \frac{r}{20} \right) \right)^{\frac{b-1}{b}} \right\}^{-2} \\
 &\quad \left\{ \text{Exp} \left(-\frac{1}{\theta} \theta \ln \left(1 - \frac{r}{20} \right) \right) \right\}^{-2} \\
 &= \frac{r(20-r)^3}{(21)} \left\{ \frac{b}{\theta} \left(-\theta \ln \left(1 - \frac{r}{20} \right) \right)^{1-\frac{1}{b}} \right\}^{-2}.
 \end{aligned}$$

الباب الرابع

التوزيع التقريبي للإحصاء الترتيبي

(٤-١) التوزيع التقريبي للإحصاء الترتيبي في حالة المجتمع المنتظم:

لما كانت دالة كثافة الاحتمال بالضبط للإحصاء الترتيبي من الرتبة r ، لأي توزيع احتمالي له دالة توزيع احتمالي F ، يكون معقد عندما n كبيرة فإن المعلومات الخاصة بشكل التوزيع التقريبي سوف تزيد من فائدة الترتيبات الإحصائية في التطبيق عندما تكون n كبيرة. عند الحديث عن التوزيع التقريبي، عموماً لأي r ، سوف نضع الشرط:

$$\text{as } n \rightarrow \infty, \quad \frac{r}{n} = p \text{ remained fixed.}$$

تحت هذا الشرط سوف نثبت أن توزيع الاحصاء الترتيبي القياسي من الرتبة r من توزيع منتظم يؤول إلى التوزيع الطبيعي القياسي.

بفرض أن $U_{(1)} < U_{(2)} < \dots < U_{(n)}$ عينة مرتبة من مجتمع يتبع التوزيع المنتظم في الفترة $(0,1)$ فإن دالة كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبي من الرتبة r ($U_{(r)}$) هو:

$$g_r(u) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} u^{r-1} (1-u)^{n-r}, \quad 0 < u < 1.$$

بفرض المتغير العشوائي:

$$Z = \frac{U_{(r)} - \mu}{\sigma},$$

حيث $U_{(r)}$ هو الإحصاء الترتيبي من الرتبة r من توزيع منتظم في الفترة $(0,1)$ حيث:

$$\mu = E(U_{(r)}) = \frac{r}{n+1},$$

$$\sigma^2 = \text{Var}(U_{(r)}) = \frac{r(n-r+1)}{(n+1)^2(n+2)}.$$

للحصول على دالة كثافة الاحتمال للمتغير Z نتبع الآتي:

$$T: \quad z = \frac{u - \mu}{\sigma}$$

$$T^{-1}: \quad \sigma z + \mu = u, \quad |J| = \sigma.$$

$$\therefore h(z) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} (\sigma z + \mu)^{r-1} (1 - \sigma z - \mu)^{n-r} \sigma$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \sigma \mu^{r-1} (1-\mu)^{n-r} \cdot \left(1 + \frac{\sigma z}{\mu}\right)^{r-1} \left(1 - \frac{\sigma z}{1-\mu}\right)^{n-r}.$$

ليكن:

$$e^v = \left(1 + \frac{\sigma Z}{\mu}\right)^{r-1} \left(1 - \frac{\sigma Z}{1-\mu}\right)^{n-r} = e^{(r-1)\ln\left(1 + \frac{\sigma Z}{\mu}\right) + (n-r)\ln\left(1 - \frac{\sigma Z}{1-\mu}\right)},$$

حيث:

$$v = (r-1)\ln\left(1 + \frac{\sigma Z}{\mu}\right) + (n-r)\ln\left(1 - \frac{\sigma Z}{1-\mu}\right)$$

$$\therefore g_r(z) = \frac{n!}{(r-1)(n-r)!} \sigma \mu^{r-1} (1-\mu)^{n-r} e^v.$$

الآن باستخدام مفكوك تيلور فإن:

$$\ln(1+x) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{x^i}{i} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

والتي تكون تقاربة عندما $-1 \leq x \leq 1$ بوضع:

$$\frac{\sigma}{\mu} = C_1, \quad \frac{\sigma}{1-\mu} = C_2$$

نحصل على:

$$\begin{aligned} v &= (r-1)\ln\left(1 + \frac{\sigma Z}{\mu}\right) + (n-r)\ln\left(1 - \frac{\sigma Z}{1-\mu}\right) \\ &= (r-1)\ln(1 + C_1 Z) + (n-r)\ln(1 - C_2 Z) \\ &= (r-1)\left(C_1 Z - \frac{C_1^2 Z^2}{2} + \frac{C_1^3 Z^3}{3} - \dots\right) - (n-r)\left(C_2 Z + \frac{C_2^2 Z^2}{2} + \frac{C_2^3 Z^3}{3} + \dots\right) \quad (1-4) \\ &= z[C_1(r-1) - C_2(n-r)] - \frac{Z^2}{2}[C_1^2(r-1) + C_2^2(n-r)] \\ &\quad + \frac{Z^3}{3}[C_1^3(r-1) - C_2^3(n-r)] \dots \end{aligned}$$

الآن المطلوب إيجاد:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v, \quad p = \frac{r}{n}.$$

يمكن تقريب C_1, C_2 بدلالة المتوسط وتباين متغير عشوائي يتبع توزيع بيتا. مع n, r كالتالي:

$$C_1 = \frac{\sigma}{\mu} = \sqrt{\frac{r(n-r+1)}{(n+1)^2(n+2)} \cdot \frac{(n+1)^2}{r^2}}.$$

$$\therefore C_1 = \frac{(n-r+1)^{\frac{1}{2}}}{[r(n+2)]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(\frac{n}{n} - \frac{r}{n} + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{r}{n}(n+2)\right)^{\frac{1}{2}}} \approx \frac{\sqrt{1-p}}{\sqrt{np}} \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

وذلك لأن:

$$\frac{r}{n} = p \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

وبما أن:

$$\mu = \frac{r}{n+1},$$

$$\begin{aligned} \therefore 1-\mu &= 1 - \frac{r}{n+1} \\ &= \frac{n+1-r}{n+1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore C_2 &= \frac{\sigma}{1-\mu} = \sqrt{\frac{r(n-r+1)}{(n+1)^2(n+2)} \cdot \frac{(n+1)^2}{(n-r+1)^2}} \\ &= \frac{r^{\frac{1}{2}}}{[(n+2)(n-r+1)]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\left(\frac{r}{n}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left[(n+2)\left(\frac{n}{n} - \frac{r}{n} + \frac{1}{n}\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \\ \therefore C_2 &\approx \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{n(1-p)}} \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

بالتعويض عن هذه القيم في (١٠٤) يمكن الحصول على معاملات Z كالتالي:

$$(r-1) \frac{\sqrt{(1-p)}}{\sqrt{np}} - \frac{(n-r)\sqrt{p}}{\sqrt{n(1-p)}} = \frac{(np-1)\sqrt{1-p}}{\sqrt{np}} - \frac{(n-np)\sqrt{p}}{\sqrt{n(1-p)}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(np-1)\sqrt{1-p}}{\sqrt{np}} - \frac{n(1-p)\sqrt{p}}{\sqrt{n(1-p)}} \\
 &= \frac{(np-1)\sqrt{1-p}}{\sqrt{np}} - \sqrt{np} \sqrt{(1-p)} \\
 &= \sqrt{1-p} \left[\frac{np-1-np}{\sqrt{np}} \right] \\
 &= \frac{-\sqrt{1-p}}{\sqrt{np}} \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

معاملات $-\frac{z^2}{2}$ في (١٠٤) يمكن الحصول عليها كالتالي:

$$\begin{aligned}
 \frac{(r-1)(1-p)}{np} + \frac{(n-r)p}{n(1-p)} &= \frac{(np-1)(1-p)}{np} + \frac{(n-np)p}{n(1-p)} \\
 &= \frac{(np-1)(1-p)}{np} + \frac{n(1-p)p}{n(1-p)} \\
 &= \frac{np(1-p) - (1-p)}{np} + p \\
 &= (1-p) - \frac{1-p}{np} + p \\
 &= 1 - \frac{1-p}{np} \rightarrow 1 \quad \text{as } n \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

ومعاملات $-\frac{z^3}{3}$ في (١٠٤) يمكن الحصول عليها كالتالي:

$$\begin{aligned}
 \frac{(r-1)(1-p)^{\frac{3}{2}}}{(np)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(n-r)p^{\frac{3}{2}}}{[n(1-p)]^{\frac{3}{2}}} &= \frac{(np-1)(1-p)^{\frac{3}{2}}}{(np)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(n-np)p^{\frac{3}{2}}}{[n(1-p)]^{\frac{3}{2}}} \\
 &= \frac{(np-1)\sqrt{(1-p)^3}}{(np)^{\frac{3}{2}}} - \frac{n(1-p)\sqrt{p^3}}{\sqrt{n^3(1-p)^3}}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{(np-1) \left(\frac{1-p}{p} \right)^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{3}{2}}} - \frac{p^{\frac{3}{2}}}{[n(1-p)]^{\frac{1}{2}}} \rightarrow 0$$

as $n \rightarrow \infty$

وبالتعويض عن هذه القيم في (١٠٤) وإهمال الحدود من الرتبة $n^{-\frac{1}{2}}$ فإن:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v = \frac{-z^2}{2},$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} e^v = e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

لإيجاد القيمة للثابت في (١٠٤) عندما $n \rightarrow \infty$ لابد من استخدام صيغة استيرلنج Stirling's وهي:

$$K! \approx \sqrt{2\pi} e^{-K} K^{K+\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \sigma \mu^{r-1} (1-\mu)^{n-r} = \sqrt{\frac{r(n-r+1)}{(n+1)^2 (n+2)}} \cdot \left(\frac{r}{n+1} \right)^{r-1} \left(1 - \frac{r}{n+1} \right)^{n-r}$$

$$= \frac{r^{r-0.5} (n-r+1)^{n-r+\frac{1}{2}}}{(n+1)^n (n+2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\approx \frac{r^{r-0.5} (n-r+1)^{n-r+0.5}}{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

وعلى ذلك فإن الجزء الثابت في (١٠٤) عندما $n \rightarrow \infty$ يكتب كالتالي:

$$\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \sigma \mu^{r-1} (1-\mu)^{n-r} = \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!} \cdot \frac{r(n-r+1)}{n+1} \cdot \sigma \mu^{r-1} (1-\mu)^{n-r}$$

$$\approx \frac{\sqrt{2\pi} e^{-(n+1)} (n+1)^{n+\frac{3}{2}}}{2\pi e^{-r} r^{r+\frac{1}{2}} e^{-(n-r+1)} (n-r+1)^{n-r+\frac{3}{2}}}$$

$$\cdot \frac{r^{r+\frac{1}{2}} (n-r+1)^{n-r+\frac{3}{2}}}{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} h_r(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}},$$

اذن $Z \sim N(0,1)$ وذلك عندما $n \rightarrow \infty$ وبما أن:

$$Z = \frac{U_{(r)} - \mu}{\sigma}$$

فإن:

$$U_{(r)} \sim N(\mu, \sigma^2) \text{ وذلك عندما } n \rightarrow \infty$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} P(U_{(r)} \leq t) = \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right).$$

أي أن دالة التوزيع التجميعي للمتغير $U_{(r)}$ عندما $n \rightarrow \infty$ هي:

$$F_{r,n}(t) = P(U_{(r)} \leq t)$$

$$= \int_{-\infty}^t g_r(u) du$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{t-\mu}{\sigma}} h(z) dz$$

$$= \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right).$$

(٢-٤) التوزيع التقريبي لوسيط العينة في حالة المجتمع المنتظم:

في هذا البند وتحت فرض التوزيع المنتظم على الفترة (0,1) سوف نوجد توزيعاً تقريبياً لوسيط العينة عندما يكون حجم العينة كبيراً. إذا كانت $U_{(1)} < U_{(2)} < \dots < U_{(n)}$ عينة مرتبة من مجتمع يتبع توزيع منتظم على الفترة (0,1) وكانت $n = 2m + 1$ ، فردية فإن دالة الكثافة الاحتمالية للوسيط $U_{(m+1)}$ هي:

$$g_{m+1}(u) = \frac{(2m+1)!}{m! m!} u^m (1-u)^m, \quad 0 < u < 1,$$

$$\therefore E(U_{(r)}) = \frac{r}{n+1}.$$

بوضع $r = m + 1$ ، $n = 2m + 1$. أذن:

$$E(U_{(m+1)}) = \frac{m+1}{2m+2} = \frac{m+1}{2(m+1)} = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \text{Var}(U_{(r)}) = \frac{r(n-r+1)}{(n+2)(n+1)^2}$$

بوضع $n = 2m+1, r = m+1$. أذن :

$$\text{Var}(U_{(m+1)}) = \frac{1}{4(2m+3)} \approx \frac{1}{4n}.$$

نظرية (١-٢-٤):

إذا كانت:

$$Z = \frac{U - E(U)}{\sqrt{\text{Var}(U)}} = \left(U - \frac{1}{2} \right) 2\sqrt{n}, \quad U = U_{(m+1)}$$

فإن Z تقريبا يتبع توزيع طبيعي قياسي.

البرهان:

سوف نستخدم دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير U لإيجاد دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير Z .
وباستخدام التحويلة:

$$T: z = \left(u - \frac{1}{2} \right) 2\sqrt{n}$$

$$\therefore T^{-1}: \left(\frac{z}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{2} \right) = u$$

$$\therefore \frac{dz}{2\sqrt{n}} = du.$$

$$\begin{aligned} \therefore w(z) &= \frac{(2m+1)!}{m! m!} \cdot \frac{1}{2\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{2\sqrt{n}} \right)^m \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{2\sqrt{n}} \right)^m \\ &= \frac{(2m+1)!}{m! m!} \cdot \frac{1}{2\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{4^m} \cdot \left(1 - \frac{z^2}{n} \right)^m. \end{aligned}$$

وحيث أن n كبيرة فيمكن اعتبار $n = 2m$ كما يمكن استخدام صيغة استرلنج حيث:

$$K! = \sqrt{2\pi} e^{-K} K^{K+\frac{1}{2}},$$

وبذلك يمكن كتابة $w(z)$ علي الصورة:

$$w(z) = \frac{\sqrt{2\pi} e^{-(2m+1)} (2m+1)^{2m+1+\frac{1}{2}}}{\left(\sqrt{2\pi} e^{-m} m^{m+\frac{1}{2}} \right)^2 \cdot 2\sqrt{2m} \cdot 2^{2m}} \cdot \left(1 - \frac{z^2}{2m} \right)^m$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{z_{1/2}^2}{m}\right)^m.$$

وعندما تكون n أي m كبيرة فإن:

$$w(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

أي أن Z تتبع تقريبا توزيع طبيعي قياسي وعلى ذلك $U \sim N\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4n}\right)$ عندما $n \rightarrow \infty$

(٣-٤) التوزيع التقريبي للإحصاء الترتيبي من الرتبة r لأي توزيع احتمالي:

إذا كان Y_r هو الإحصاء الترتيبي لأي توزيع احتمالي له دالة توزيع $F(x)$ فإن النظرية التالية تعطي التوزيع التقريبي للإحصاء الترتيبي Y_r ، وذلك بالاعتماد على نظرية التحويل التكاملي في الحصول على المتوسط والتباين التقريبي المناسبين وهما:

$$\mu = E(Y_r) \approx F^{-1}\left(\frac{r}{n+1}\right),$$

$$\sigma^2 = \text{Var}(Y_r) \approx \frac{r(n-r+1)}{(n+1)^2(n+2)} \left\{ f\left[F^{-1}\left(\frac{r}{n+1}\right)\right] \right\}^{-2}.$$

تحت فرض أن $\frac{r}{n} = p$ و n كبيرة فيمكن وضع:

$$\mu = F^{-1}(p),$$

$$\sigma = \frac{p^{\frac{1}{2}}(1-p)^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}} [f(\mu)]^{-1}.$$

نظرية (٢-٢-٤):

إذا كان Y_r يمثل الإحصاء الترتيبي من الرتبة r للعينة العشوائية X_1, X_2, \dots, X_n والمسحوبة من توزيع احتمالي متصل له دالة توزيع تجميعي $F(x)$ فإنه عندما n تؤول إلى ما لا نهاية و $\frac{r}{n}$ تظل ثابتة، فإن توزيع:

$$Z = (Y_r - \mu) f(\mu) \left[\frac{n}{p(1-p)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

يؤول إلى التوزيع الطبيعي القياسي حيث μ تحقق الشرط أن $F(\mu) = p$ و $p = \frac{r}{n}$ وعلى ذلك Y_r تؤول إلى التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباين σ^2 أي أن:

$$Y_r \sim N(\mu, \sigma^2)$$

التوزيع التقريبي لوسيط العينة:

التوزيع التقريبي لوسيط العينة أو الإحصاء الترتيبي Y_{m+1} حيث n فردية يحسب كالتالي:

$$\therefore E(Y_r) \approx F^{-1}\left(\frac{r}{n+1}\right),$$

بوضع $n = 2m+1, r = m+1$ فإن:

$$\begin{aligned} E(Y_{m+1}) &= F^{-1}\left(\frac{m+1}{2m+2}\right) \\ &= F^{-1}\left(\frac{m+1}{2(m+1)}\right) = F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = v, \end{aligned}$$

$$\therefore \text{Var}(Y_r) = \frac{r(n-r+1)}{(n+2)(n+1)^2} [f(v)]^{-2}$$

$$\therefore \text{Var}(Y_{m+1}) = \frac{[f(v)]^{-2}}{4(n+2)} \approx \frac{[f(v)]^{-2}}{4n}.$$

من نظرية (٤-٢-٢) وكحالة خاصة عندما $r = m+1$ فإن:

$$Z = \frac{Y_{m+1} - v}{\sqrt{\frac{1}{4n[f(v)]^2}}} \sim N(0,1),$$

$$\therefore Y_{m+1} \sim N\left(v, \frac{1}{4n[f(v)]^2}\right).$$

وهذا يعني أن وسيط العينة Y_{m+1} مقدر غير متحيز لوسيط المجتمع v .

برهان آخر:

بفرض عينة مرتبة من الحجم $n = 2m+1$ و n فردية ومختارة من مجتمع بدلالة دالة كثافة

احتمال $f(x)$ ووسيط v (وبالمثل $F(v) = \frac{1}{2}$) والذي يفترض أنه وحيد. بفرض أن وسيط العينة

هو الإحصاء الترتيبي من الرتبة $m+1$ بدالة كثافة احتمال:

$$g_{m+1}(x) = \frac{(2m+1)!}{(m!)^2} [F(x)]^m [1-F(x)]^m f(x).$$

ليكن:

$$\begin{aligned} y &= 2\sqrt{2m+1} f(v) \cdot (x-v) \\ &= c(x-v) \end{aligned}$$

اذن:

$$h(y) = \frac{(2m+1)!}{(m!)^2} 2^m \left[F\left(v + \frac{y}{c}\right) \right]^m 2^m \left[1 - F\left(v + \frac{y}{c}\right) \right]^m f\left(v + \frac{y}{c}\right) \frac{2^{-2m}}{c}$$

باستخدام تقريب استرلنج فإن:

$$\frac{(2m+1)!}{(m!)^2 \sqrt{2m+1} 2^{2m+1}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ as } m \rightarrow \infty,$$

حيث:

$$m! \sim \sqrt{2\pi} e^{-m} m^{m+\frac{1}{2}}$$

ايضا:

$$\frac{f\left(v + \frac{y}{c}\right)}{f(v)} \rightarrow 1 \text{ as } m \rightarrow \infty,$$

وذلك لأي ثابت y .

باستخدام مفكوك تايلور فإن:

$$\begin{aligned} F\left(v + \frac{y}{c}\right) &= F(v) + \frac{y}{c} F'(v) + \frac{1}{2} \frac{y^2}{c^2} f'(v) + o\left(\frac{1}{m}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{y}{c} f(v) + \frac{1}{2} \frac{y^2}{c^2} f'(v) + o\left(\frac{1}{m}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{y}{2\sqrt{2m+1}} + \frac{y^2}{8(2m+1)} \left\{ \frac{f'(v)}{f^2(v)} \right\} + o\left(\frac{1}{m}\right) \\ \therefore 2F\left(v + \frac{y}{c}\right) &= 1 - \frac{y}{\sqrt{2m+1}} + \frac{y^2}{4(2m+1)} \left\{ \frac{f'(v)}{f^2(v)} \right\} + o\left(\frac{1}{m}\right) \\ 2\left[1 - F\left(v + \frac{y}{c}\right)\right] &= 1 - \frac{y}{\sqrt{2m+1}} - \frac{y^2}{4(2m+1)} \left\{ \frac{f'(v)}{f^2(v)} \right\} + o\left(\frac{1}{m}\right) \end{aligned}$$

ليكن:

$$e^v = \left\{ 2F\left(v + \frac{y}{c}\right) \cdot 2\left[1 - F\left(v + \frac{y}{c}\right)\right] \right\}^m$$

$$= 2^m \left[F\left(v + \frac{y}{c}\right) \right]^m 2^m \left[1 - F\left(v + \frac{y}{c}\right) \right]^m$$

حيث:

$$\begin{aligned} & m \log \left\{ 2F\left(v + \frac{y}{c}\right) \right\} + m \log \left\{ 2 \left[1 - F\left(v + \frac{y}{c}\right) \right] \right\} \\ &= m \log \left[1 + \frac{y}{\sqrt{2m+1}} + \dots \right] + m \log \left[1 - \frac{y}{\sqrt{2m+1}} - \dots \right] \end{aligned}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} v = -\frac{y^2}{2}$$

(m كبيرة تعني أن n كبيرة)

$$\therefore \lim_{m \rightarrow \infty} e^{-v} = e^{\frac{y^2}{2}}$$

$$\therefore h(y) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{y^2}{2}} \text{ as } m \rightarrow \infty.$$

$$2\sqrt{2m+1} \cdot f(v)(y_{m+1} - v) \quad \text{وبالمثل:}$$

تؤول إلى التوزيع الطبيعي القياسي عندما $n \rightarrow \infty$.

وعلى ذلك:

$$Y_{m+1} \sim N\left(v, \frac{1}{4n[f(v)]^2}\right)$$

حيث $n = 2m + 1$ رقم فردي. وهذا يعني أن الوسيط له توزيع تقريبي بمتوسط v وتباين $\frac{1}{4nf^2(v)}$

وذلك عندما $n \rightarrow \infty$. عندما تسحب العينات من مجتمع طبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ فإن:

$$\mu = v, f(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

$$\therefore E(Y_{r+1}) = v,$$

$$\text{Var}(Y_{r+1}) = \frac{1}{4n}(2\pi\sigma^2) = \frac{\pi\sigma^2}{2n}.$$

الباب الخامس

تقديرات تعتمد على الإحصاءات الترتيبية

(١-٥) مقدمة:

تهتم نظرية التقدير الإحصائي بمشكلة تقدير المعالم المجهولة لبعض دوال كثافة الاحتمال وذلك لعينات عشوائية مختارة من تلك المجتمعات. التقديرات التي تعتمد على الإحصاءات الترتيبية تمتاز بالسهولة ولكن يعاب عليها أنها لا تستفيد من كل المعلومات الموجودة في العينة. في البنود التالية سوف نناقش مشكلة التقدير للوسط الحسابي والمدى لأشكال خاصة من المجتمعات مثل التوزيع المستطيل والتوزيع المثلث وايضا مشكلة تقدير معالم توزيع لابلاس وتوزيع كوشي.

(٢-٥) التوزيع المستطيل

لتكن X_1, X_2, \dots, X_n عينة عشوائية مأخوذة من توزيع له دالة كثافة احتمال :

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq x \leq b.$$

في هذا البند سوف نقدم مقدر لكل من الوسط الحسابي والمدى وذلك بطريقتين. في الطريقة الأولى سوف نستخدم على الإحصاءات الترتيبية فقط. أما في الطريقة الثانية فسوف نضيف أسلوب يميز ذلك للحصول على مقدر لكل من الوسط الحسابي والمدى.

(١-٢-٥) الطريقة الاولى (الاعتماد على الإحصاءات الترتيبية فقط):

أولاً: مقدر للوسط الحسابي:

لتكن $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n$ الإحصاءات الترتيبية للعينة العشوائية. الوسط الحسابي للمجتمع

هو:

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{x^2}{2(b-a)} \Big|_a^b = \frac{(b^2 - a^2)}{2(b-a)}.$$

$$\therefore \mu = \frac{a+b}{2}.$$

سوف نعتبر:

$$\mu^* = \frac{Y_r + Y_{n-r+1}}{2}$$

مقدراً لـ μ . الآن سوف ندرس خواص هذا المقدر. لإثبات أن هذا المقدر غير متحيز لـ μ نتبع الآتي:

ليكن:

$$W = nF(X) \quad , \quad Z = n[1 - F(Y)],$$

$$X = Y_r \quad , \quad Y = Y_{n-r+1} \quad ,$$

$$E(W) = \frac{n r}{n+1} \quad , \quad E(Z) = \frac{n r}{n+1} \quad ,$$

$$E(ZW) = \frac{n^2 r^2}{(n+1)(n+2)} \quad ,$$

$$E(Z)^2 = E(W^2) = \frac{n^2 r(r+1)}{(n+1)(n+2)}.$$

$$F(x) = \int_a^x \frac{dt}{b-a} = \frac{t}{b-a} \Big|_a^x$$

$$= \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x < b \\ 1 & x \geq b, \end{cases}$$

$$W = nF(X) \Rightarrow \frac{W}{n} = F(X) = \frac{X-a}{b-a}$$

$$\therefore X = \frac{W}{n}(b-a) + a.$$

$$E(X) = \frac{n r}{n(n+1)}(b-a) + a = a + \frac{r}{(n+1)}(b-a).$$

وبالمثل:

$$F(Y) = \frac{Y-a}{b-a} \Rightarrow 1 - F(Y) = \frac{b-Y}{b-a}$$

$$Z = n[1 - F(Y)] \Rightarrow \frac{Z}{n} = \frac{b-Y}{b-a}.$$

$$\therefore Z = \frac{n(b-Y)}{b-a} \Rightarrow Y = b - \frac{Z}{n}(b-a).$$

$$\therefore E(Y) = b - \frac{r n}{(n+1)n}(b-a)$$

$$= b - \frac{r}{n+1}(b-a).$$

$$E\left(\frac{X+Y}{2}\right) = \frac{1}{2}[E(X) + E(Y)]$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ a + \frac{r(b-a)}{(n+1)} + b - r \frac{(b-a)}{(n+1)} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} [a + b].$$

إذن $\frac{Y_r + Y_{n-r+1}}{n}$ مقدرا غير متحيز للوسط الحسابي لهذا التوزيع.
الآن لإثبات أن هذا المقدر له خاصية الاتساق Consistency لابد من إيجاد التباين له.

$$\text{Var}\left(\frac{X+Y}{2}\right) = \frac{1}{4} \text{Var}(X+Y)$$

$$= \frac{1}{4} E[(X+Y) - E(X+Y)]^2$$

$$= \frac{1}{4} E[(X+Y) - (a+b)]^2$$

$$= \frac{1}{4} E[(X-a) + (Y-b)]^2$$

$$= \frac{1}{4} E[(X-a)^2 + (Y-b)^2 + 2(X-a)(Y-b)].$$

ليكن:

$$\therefore W = n F(X) = n \left(\frac{X-a}{b-a} \right) \Rightarrow \frac{W^2}{n^2} (b-a)^2 = (X-a)^2$$

$$\therefore E(X-a)^2 = E(W^2) \frac{(b-a)^2}{n^2}$$

$$= \frac{n^2 r(r+1)(b-a)^2}{n^2 (n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{r(r+1)(b-a)^2}{(n+1)(n+2)}.$$

$$\therefore Z = \frac{n(b-Y)}{(b-a)}$$

$$\therefore \frac{Z(b-a)}{n} = (b-Y)$$

$$\begin{aligned}
 \therefore E(b - Y)^2 &= \frac{E[Z^2(b - a)^2]}{n^2} \\
 &= \frac{n^2 r(r+1)(b-a)^2}{n^2(n+1)(n+2)} = \frac{r(r+1)(b-a)^2}{(n+1)(n+2)}. \\
 \because (X-a)(Y-b) &= \frac{W(b-a)}{n} \frac{Z}{n} (b-a). \\
 \therefore E[(X-a)(Y-b)] &= \frac{-E[WZ(b-a)^2]}{n^2} \\
 &= \frac{-n^2 r^2 (b-a)^2}{n^2(n+1)(n+2)} \\
 &= \frac{-r^2 (b-a)^2}{(n+1)(n+2)}. \\
 \therefore \text{Var}\left(\frac{X+Y}{2}\right) &= \frac{1}{4} E[(X-a)^2 + (b-Y)^2 + 2(X-a)(Y-b)] \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{2r(r+1)(b-a)^2}{(n+1)(n+2)} - \frac{2r^2(b-a)^2}{(n+1)(n+2)} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \frac{(b-a)^2}{(n+1)(n+2)} (2r^2 + 2r - 2r^2) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{r(b-a)^2}{(n+1)(n+2)}. \\
 \text{as } n \rightarrow \infty \quad \text{Var}\left[\frac{(X+Y)}{2}\right] &\rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

أي أن هذا المقدر له خاصية الاتساق.

عندما $r=1$ فإن:

$$\begin{aligned}
 E(\mu^*) &= E\left[\frac{(Y_n + Y_1)}{2}\right] = \frac{b+a}{2}, \\
 \text{Var}(\mu^*) &= \frac{(b-a)^2}{2(n+1)(n+2)}.
 \end{aligned}$$

وهذا يعني أن نصف المدى مقدر غير متحيز وله خاصية الاتساق لمتوسط التوزيع .

ثانياً: مقدر للمدى:

مدى هذا التوزيع هو $(b-a)$ ، سوف نستخدم $Y_n - Y_1$ كمقدر لهذا المدى. الآن سوف ندرس خواص هذا المقدر.

$$\begin{aligned} E(Y-X) &= E\left(b - \frac{Z}{n}(b-a) - \frac{W}{n}(b-a) - a\right) \\ &= \left[(b-a) - \frac{2r(b-a)}{(n+1)}\right] \\ &= (b-a)\left(1 - \frac{2r}{(n+1)}\right). \end{aligned}$$

أي أن $Y_n - Y_1$ مقدر متحيز للمدى $(b-a)$.

$$\text{سوف نثبت إن المقدر } \xi = \left(\frac{Y-X}{1 - \frac{2r}{(n+1)}}\right) \text{ غير متحيز للمدى.}$$

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \left(\frac{(n+1)}{n-2r+1}\right)E(Y-X) \\ &= \frac{n+1}{(n-2r+1)} \cdot \frac{(n-2r+1)}{(n+1)}(b-a) \\ &= (b-a), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\frac{(Y-X)}{1 - \frac{2r}{(n+1)}}\right) &= \frac{1}{\left(1 - \frac{2r}{(n+1)}\right)^2} \text{Var}(Y-X) \\ &= \frac{E[(Y-X) - E(Y-X)]^2}{\left(1 - \frac{2r}{(n+1)}\right)^2} \\ &= \frac{E\left[(b-a)\left(1 - \frac{Z+W}{n}\right) - (b-a)\left(1 - \frac{2r}{(n+1)}\right)\right]^2}{\left(1 - \frac{2r}{(n+1)}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (b-a)^2 \left[E \left(1 - \frac{Z+W}{n} \right)^2 - 2E \left(1 - \frac{Z+W}{n} \right) \left(1 - \frac{2r}{(n+1)} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(1 - \frac{2r}{(n+1)} \right)^2 \right] / \left(1 - \frac{2r}{(n+1)} \right)^2 \\
 &= \frac{(b-a)^2}{\left(1 - \frac{2r}{(n+1)} \right)^2} \left[E \left(1 - \frac{Z+W}{n} \right)^2 - \left(1 - \frac{2r}{(n+1)} \right)^2 \right] \\
 &= \frac{(b-a)^2}{\left(1 - \frac{2r}{(n+1)} \right)^2} \left[1 - 2E \left(\frac{Z+W}{n} \right) + E \left(\frac{Z+W}{n} \right)^2 - \left(1 - \frac{2r}{(n+1)} \right)^2 \right] \\
 &= \frac{(b-a)^2}{\left(1 - \frac{2r}{(n+1)} \right)^2} \left[1 - \frac{4r}{(n+1)} + \frac{2r(r+1)}{(n+1)(n+2)} + \frac{2r^2}{(n+1)(n+2)} \right. \\
 &\quad \left. - 1 + \frac{4r}{(n+1)} - \frac{4r^2}{(n+1)^2} \right] \\
 &= \frac{(b-a)^2}{\left(1 - \frac{2r}{(n+1)} \right)^2} \left[\frac{2r(r+1)}{(n+1)(n+2)} + \frac{2r^2}{(n+1)(n+2)} - \frac{4r^2}{(n+1)^2} \right] \\
 &= 2r \frac{[(r+1)(n+1) + r(n+1) - 2r(n+2)]}{(n+1)^2(n+2)} (b-a)^2 \\
 &= 2r \frac{[rn + r + n + 1 + rn + r - 2rn - 4r]}{(n+1)^2(n+2)} (b-a)^2 \\
 &= \frac{2r[n - 2r + 1]}{(n+1)^2(n+2)} (b-a)^2.
 \end{aligned}$$

عندما $r=1$ فإن :

$$\begin{aligned}
 E(Y-X) &= E(Y_n - Y_1) \\
 &= \frac{n-1}{n+1} (b-a). \\
 \therefore E \left[\frac{n+1}{n-1} (Y_n - Y_1) \right] &= b-a,
 \end{aligned}$$

$$\text{Var}\left[\frac{n+1}{n-1}(Y_n - Y_1)\right] = \frac{2(b-a)^2(n-1)}{(n+1)^2(n+2)}.$$

(٢-٢-٥) الطريقة الثانية (إتباع أسلوب بيز):

ليكن:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0 & \text{e.w.} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & , a \leq x < b, \\ 1 & , x \geq b. \end{cases}$$

دالة كثافة الاحتمال المشتركة للاحصاءين الترتيبين Y_s, Y_r هي:

$$g_{r,s}(x,y) = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} f(x)f(y) \cdot [F(x)]^{r-1} [F(y) - F(x)]^{s-r-1} [1 - F(y)]^{n-s}.$$

ليكن:

$$X = Y_r, \quad Y = Y_s, \quad s > r, \quad a \leq x < y \leq b.$$

عندما:

$$r = 1, \quad s = n,$$

فإن:

$$g_{1,n}(x,y) = n(n-1) \left(\frac{1}{b-a} \right) \left(\frac{1}{b-a} \right) \left(\frac{y-a}{b-a} - \frac{x-a}{b-a} \right)^{n-2},$$

$$= \frac{n(n-1)(y-x)^{n-2}}{(b-a)^n}, \quad a \leq x < y \leq b.$$

سوف نفترض التوزيع القبلي التالي:

$$\Pi_1(a,b) = \frac{\alpha_0(\alpha_0+1)(M_0 - m_0)^{\alpha_0}}{(b-a)^{\alpha_0+2}}, \quad a \leq m_0 < M_0 \leq b.$$

التوزيع البعدي المرافق سوف يأخذ الشكل التالي:

$$\Pi_2(a, b|x, y) = \frac{\alpha_1(\alpha_1 + 1)(M_1 - m_1)^{\alpha_1}}{(b - a)^{\alpha_1 + 2}}, \quad a \leq m_1 < M_1 \leq b.$$

حيث:

$$m_1 = \text{Min}(x, m_0),$$

$$M_1 = \text{Max}(y, M_0),$$

$$\alpha_1 = \alpha_0 + n.$$

التوزيع البعدي الهامشي لـ b هو:

$$\begin{aligned} \Pi_3(b|x, y) &= \int_{-\infty}^{m_1} \frac{\alpha_1(\alpha_1 + 1)(M_1 - m_1)^{\alpha_1}}{(b - a)^{\alpha_1 + 2}} da \\ &= \alpha_1(\alpha_1 + 1)(M_1 - m_1)^{\alpha_1} \int_{-\infty}^{m_1} \frac{1}{(b - a)^{\alpha_1 + 2}} da. \end{aligned}$$

ليكن:

$$(b - a) = q$$

$$\begin{aligned} \Pi_3(b|x, y) &= \alpha_1(\alpha_1 + 1)(M_1 - m_1)^{\alpha_1} \int_{b - m_1}^{\infty} q^{-(\alpha_1 + 2)} dq \\ &= \alpha_1(\alpha_1 + 1)(M_1 - m_1)^{\alpha_1} \frac{q^{-(\alpha_1 + 1)}}{-(\alpha_1 + 1)} \Big|_{b - m_1}^{\infty} \\ &= \frac{\alpha_1(\alpha_1 + 1)(M_1 - m_1)^{\alpha_1}}{(\alpha_1 + 1)} (b - m_1)^{-(\alpha_1 + 1)} \\ &= \frac{\alpha_1(\alpha_1 + 1)(M_1 - m_1)^{\alpha_1}}{(\alpha_1 + 1)(b - m_1)^{\alpha_1 + 1}} \\ &= \frac{\alpha_1(M_1 - m_1)^{\alpha_1}}{(b - m_1)^{\alpha_1 + 1}}, \quad b \geq M_1. \end{aligned}$$

ليكن:

$$(b - m_1) = Z_1 \rightarrow E(b) = E(Z_1) + m_1.$$

$$\therefore f_1(z_1) = \frac{\alpha_1(M_1 - m_1)^{\alpha_1}}{z_1^{\alpha_1 + 1}}.$$

$$\therefore b = z_1 + m_1, \quad M_1 \leq b \rightarrow \boxed{M_1 - m_1 \leq z_1}.$$

$$\therefore E(Z_1) = \int_{M_1 - m_1}^{\infty} \frac{\alpha_1(M_1 - m_1)^{\alpha_1} z_1}{z_1^{\alpha_1 + 1}} dz_1$$

$$\begin{aligned}
 &= \alpha_1 (M_1 - m_1)^{\alpha_1} \int_{M_1 - m_1}^{\infty} z_1^{-\alpha_1} dz_1 \\
 &= \alpha_1 (M_1 - m_1)^{\alpha_1} \frac{z_1^{-\alpha_1+1}}{-\alpha_1+1} \Big|_{M_1 - m_1}^{\infty} \\
 &= \frac{\alpha_1 (M_1 - m_1)^{\alpha_1}}{(\alpha_1 - 1)(M_1 - m_1)^{\alpha_1-1}}.
 \end{aligned}$$

المقدر البيزي للمعلمة b تحت فرض داله خسارة مربع الخطأ يمكن الحصول عليه كالتالي:

$$E(b|x, y) = E(Z_1) + m_1.$$

التوزيع البعدي الهامشي لـ a هو:

$$\begin{aligned}
 \Pi_4(a|x, y) &= \int_{M_1}^{\infty} \frac{\alpha_1 (\alpha_1 + 1) (M_1 - m_1)^{\alpha_1}}{(b - a)^{\alpha_1+2}} db \\
 &= \alpha_1 (\alpha_1 + 1) (M_1 - m_1)^{\alpha_1} \int_{M_1}^{\infty} \frac{1}{(b - a)^{\alpha_1+2}} db
 \end{aligned}$$

ليكن:

$$(b - a) = y,$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \alpha_1 (\alpha_1 + 1) (M_1 - m_1)^{\alpha_1} \int_{M_1 - a}^{\infty} y^{-\alpha_1-2} dy &= \frac{\alpha_1 (\alpha_1 + 1) (M_1 - m_1)^{\alpha_1}}{(\alpha_1 + 1) (M_1 - a)^{\alpha_1+1}} \\
 &= \frac{\alpha_1 (M_1 - m_1)^{\alpha_1}}{(M_1 - a)^{\alpha_1+1}}, \quad a \leq m_1.
 \end{aligned}$$

ليكن:

$$\begin{aligned}
 z_2 = M_1 - a &\Rightarrow -a = z_2 - M_1 \\
 a = M_1 - z_2, \quad a \leq m_1 \\
 M_1 - z_2 \leq m_1 &\Rightarrow M_1 - m_1 \leq z_2 \\
 z_2 &\geq M_1 - m_1,
 \end{aligned}$$

$$f_2(z_2) = \frac{\alpha_1 (M_1 - m_1)^{\alpha_1}}{z_2^{\alpha_1+1}}, \quad z_2 \geq M_1 - m_1.$$

المقدر البيزي للمعلمة a هو $E(a|x, y)$ تحت فرض داله خسارة مربع الخطأ والذي يمكن إيجاده بدلالة المتغير Z_2 حيث:

$$E(a|x, y) = M_1 - E(Z_2).$$

الآن سوف نوجد التوزيع المشترك البعدى للمتغيرين μ , ϕ بدلاله داله التوزيع المشترك البعدى للمتغيرين a , b حيث المتوسط والمدى للتوزيع المستطيل هما على التوالي:

$$E(X) = \frac{a+b}{2} = \mu ,$$

$$(b-a) = \phi .$$

ليكن:

$$\mu = \frac{a+b}{2} , \quad \phi = b-a ,$$

بحل المعادلتين آنيا إذن:

$$2\mu = a+b \Rightarrow \frac{\phi = b-a}{2\mu + \phi = 2b}$$

$$\Rightarrow \boxed{b = \mu + \frac{\phi}{2}}$$

$$\Rightarrow 2\mu = a + \mu + \frac{\phi}{2}$$

$$\Rightarrow 2\mu - \mu - \frac{\phi}{2} = a$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \mu - \frac{\phi}{2}} ,$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial \mu} & \frac{\partial a}{\partial \phi} \\ \frac{\partial b}{\partial \mu} & \frac{\partial b}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 .$$

أى أن التوزيع المشترك البعدى لـ μ , ϕ هو:

$$\therefore \Pi_s(\mu, \phi | x, y) = \frac{\alpha_1(\alpha_1 + 1)(M_1 - m_1)^{\alpha_1}}{\phi^{\alpha_1 + 2}} .$$

بما أن:

$$\mu - \frac{1}{2}\phi \leq m_1 < M_1 \leq \mu + \frac{1}{2}\phi \Rightarrow M_1 \leq \mu + \frac{1}{2}\phi , \quad \mu - \frac{1}{2}\phi \leq m_1$$

$$\Rightarrow M_1 - \frac{1}{2}\phi \leq \mu , \quad \mu \leq m_1 + \frac{1}{2}\phi$$

$$\Rightarrow M_1 - \frac{1}{2}\phi \leq \mu \leq m_1 + \frac{1}{2}\phi .$$

التوزيع الهامشى البعدى للمتغير ϕ نحصل عليه كالتالى:

$$\begin{aligned}
 \Pi_6(\phi|x, y) &= \int_{M_1 - \frac{1}{2}\phi}^{m_1 + \frac{1}{2}\phi} \frac{\alpha_1(\alpha_1 + 1)(M_1 - m_1)^{\alpha_1}}{\phi^{\alpha_1 + 2}} d\mu \\
 &= \frac{\alpha_1(\alpha_1 + 1)(M_1 - m_1)^{\alpha_1}}{\phi^{\alpha_1 + 2}} \int_{M_1 - \frac{1}{2}\phi}^{m_1 + \frac{1}{2}\phi} d\mu \\
 &= \frac{\alpha_1(\alpha_1 + 1)(M_1 - m_1)^{\alpha_1}}{\phi^{\alpha_1 + 2}} [m_1 - M_1 + \phi].
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \phi - (M_1 - m_1) = m_1 - M_1 + \phi$$

$$\therefore \phi \geq M_1 - m_1.$$

المقدر البيزي للمعلمه ϕ هو $E(\phi|x, y)$ تحت فرض داله خسارة مربع الخطأ والذي يمكن ايجاده بسهولة من $\Pi_6(\phi|x, y)$

للحصول على التوزيع الهامشي البعدي للمتغير μ نتبع الآتى :

$$\mu - \frac{1}{2}\phi \leq m_1 < M_1 \leq \mu + \frac{1}{2}\phi \Rightarrow \mu - \frac{1}{2}\phi \leq m_1, \quad M_1 \leq \mu + \frac{1}{2}\phi$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\phi \leq m_1 - \mu$$

$$\Rightarrow -\phi \leq 2(m_1 - \mu)$$

$$\Rightarrow \phi \geq -2(m_1 - \mu)$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi \geq 2(\mu - m_1)}.$$

ايضا:

$$M_1 \leq \mu + \frac{1}{2}\phi \Rightarrow M_1 - \mu \leq \frac{1}{2}\phi$$

$$\Rightarrow 2(M_1 - \mu) \leq \phi$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi \geq 2(M_1 - \mu)}$$

التوزيع الهامشي البعدي لـ μ هو:

$$\therefore \Pi_7(\mu|x, y) = \alpha_1(\alpha_1 + 1)(M_1 - m_1)^{\alpha_1} \int_{2(M_1 - \mu)}^{\infty} \phi^{-(\alpha_1 + 2)} d\phi$$

$$= \alpha_1(\alpha_1 + 1)(M_1 - m_1)^{\alpha_1} \left[\frac{\phi^{-(\alpha_1 + 1)}}{-(\alpha_1 + 1)} \right]_{2(M_1 - \mu)}^{\infty}$$

$$= \alpha_1 (M_1 - m_1)^{\alpha_1} [2(M_1 - \mu)]^{-(\alpha_1+1)}$$

$$= \frac{\alpha_1 (M_1 - m_1)^{\alpha_1}}{2^{\alpha_1+1} (M_1 - \mu)^{\alpha_1+1}}.$$

أو:

$$\Pi_7(\mu|x, y) = \alpha_1 (\alpha_1 + 1) (M_1 - m_1)^{\alpha_1} \int_{2(\mu-m_1)}^{\infty} \phi^{-(\alpha_1+2)} d\phi$$

$$= \alpha_1 (M_1 - m_1)^{\alpha_1} (\alpha_1 + 1) \frac{\phi^{-(\alpha_1+1)}}{-(\alpha_1 + 1)} \Big|_{2(\mu-m_1)}^{\infty}$$

$$= \alpha_1 (M_1 - m_1)^{\alpha_1} (\mu - m_1)^{-(\alpha_1+1)} 2^{-(\alpha_1+1)}$$

$$= \frac{\alpha_1 (M_1 - m_1)^{\alpha_1}}{2^{\alpha_1+1} (\mu - m_1)^{\alpha_1+1}}.$$

أى أن التوزيع الهامشي البعدى يمكن كتابته على الصورة:

$$\therefore \Pi_7(\mu|X, Y) = \begin{cases} \frac{\alpha_1 (M_1 - m_1)^{\alpha_1}}{2^{\alpha_1+1} (M_1 - \mu)^{\alpha_1+1}} & , \mu \leq \frac{M_1 + m_1}{2} \\ \frac{\alpha_1 (M_1 - m_1)^{\alpha_1}}{2^{\alpha_1+1} (\mu - m_1)^{\alpha_1+1}} & , \mu \geq \frac{M_1 + m_1}{2} \end{cases}$$

المقدر البيزى للمعلمه μ هو $E(\mu|x, y)$ تحت فرض داله خسارة مربع الخطأ والذي يمكن ايجاده بسهولة من $\Pi_7(\mu|X, Y)$.

(٣-٥) التوزيع المثلث:

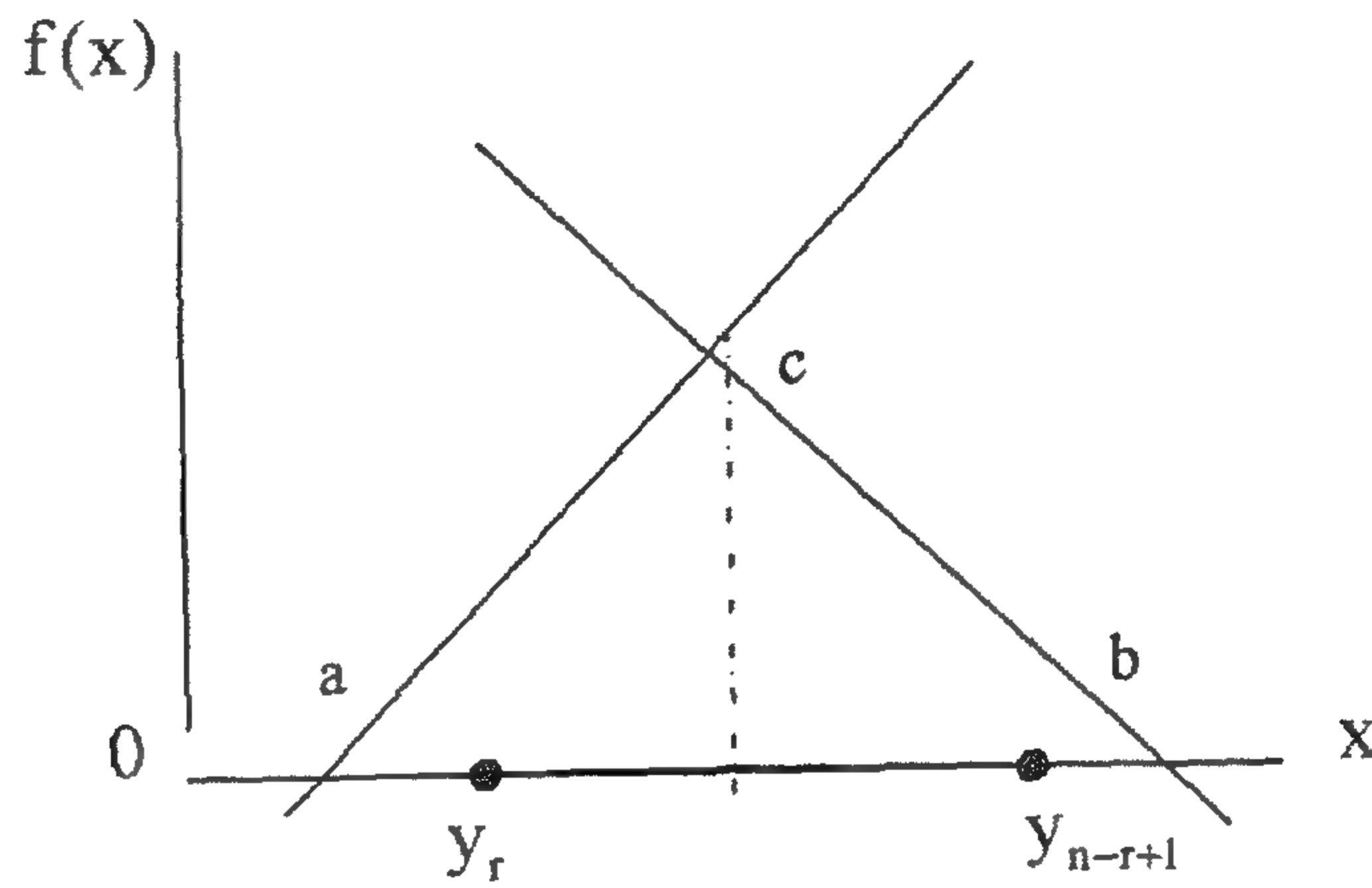
The Triangular Distribution

يهتم هذا البند بإيجاد مقدر لكل من الوسط الحسابي والمدى للتوزيع المثلث يعتمد على الإحصاءات الترتيبية . ليكن $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n$ الإحصاءات الترتيبية لعينة عشوائية مختارة من مجتمع مثلث بدالة كثافة احتمال:

تقديرات تعتمد على الإحصاءات الترتيبية

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4(b-x)}{(b-a)^2} & , \frac{a+b}{2} < x < b \\ \frac{4(x-a)}{(b-a)^2} & , a < x < \frac{a+b}{2} \\ 0 & , \text{e.w.} \end{cases}$$

الوسط الحسابي للمجتمع هو $\frac{a+b}{2}$ والمدى هو $b-a$. سوف نعتبر $\mu^* = \frac{Y_n + Y_1}{2}$ مقدراً للوسط الحسابي و $Y_n - Y_1$ مقدراً للمدى. الآن سوف ندرس خواص تلك المقدرات. بفرض أن Y_r و Y_{n-r+1} تمثل الإحصاءات الترتيبية من القمة والقاع على الترتيب.:



بأخذ التحويلة

$$\begin{aligned} w &= nF(x) \\ &= n \int_a^x \frac{4(t-a)}{(b-a)^2} dt \\ &= \frac{2n(x-a)^2}{(b-a)^2} \\ \therefore X &= a + \frac{(b-a)}{2n} \sqrt{W}, X = Y_r. \end{aligned}$$

وبالمثل بأخذ التحويلة

$$\begin{aligned} z &= n[1 - F(y)] \\ &= n \left[1 - \int_a^y \frac{4(b-t)}{(b-a)^2} dt \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= n \left\{ 1 - \left[\frac{1}{2} + \int_{\frac{x+b}{2}}^y \frac{4(b-t)}{(b-a)^2} dt \right] \right\} \\
 &= n \left\{ 1 - \left[1 - \frac{2(b-y)^2}{(b-a)^2} \right] \right\} \\
 &= \frac{2n(b-y)^2}{(b-a)^2} . \\
 \therefore Y &= b - \frac{b-a}{\sqrt{2n}} \sqrt{Z} , \quad Y = Y_{n-r+1} .
 \end{aligned}$$

عندما $r=1$ فإن:

$$\begin{aligned}
 X &= a + \frac{b-a}{\sqrt{2n}} \sqrt{W}, \\
 Y &= b - \frac{b-a}{\sqrt{2n}} \sqrt{Z} .
 \end{aligned}$$

دالة كثافة الاحتمال للمتغير W هي:

$$\therefore g_r(x) = \binom{n-1}{r-1} \left(\frac{x}{n} \right)^{r-1} \left(1 - \frac{x}{n} \right)^{n-r}$$

بوضع $u = \sqrt{w}$ فإن:

$$h(u) = \frac{2}{n^{r-1}} \binom{n-1}{r-1} u^{2r-1} \left(1 - \frac{u^2}{n} \right)^{n-r}, \quad 0 \leq u \leq \sqrt{n}.$$

$$\therefore E(U^k) = \frac{2}{n^{r-1}} \binom{n-1}{r-1} \int_0^{\sqrt{n}} u^{2r+k-1} \left(1 - \frac{u^2}{n} \right)^{n-r} du .$$

بكتابة:

$$z_1 = \frac{u^2}{n} \Rightarrow dz_1 = \frac{2u}{n} du .$$

$$\therefore E(U^k) = \frac{n^{\frac{k}{2}+1} (n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} B\left(r + \frac{k}{2}, n-r+1\right) .$$

وبنفس الشكل عندما: $v = \sqrt{Z}$, فإن:

$$E(V^k) = \frac{n^{\frac{k}{2}+1} (n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} B\left(r + \frac{k}{2}, n-r+1\right)$$

أيضاً، نعلم أن:

$$g(w, z) = \frac{1}{n^2} \frac{n!}{(r-1)!(n-2r)!} \left(\frac{w}{n}\right)^{r-1} \left(\frac{z}{n}\right)^{r-1} \left(1 - \frac{w}{n} - \frac{z}{n}\right)^{n-2r}$$

بوضع:

$$u = \sqrt{w} \quad , \quad v = \sqrt{z}$$

$$p(u, v) = \frac{4}{n^2} \frac{n!}{(r-1)!(n-2r)!} \frac{u^{2r-1}}{n^{r-1}} \frac{v^{2r-1}}{n^{r-1}} \left(1 - \frac{u^2}{n} - \frac{v^2}{n}\right)^{n-2r} .$$

$$\therefore E(U^k V^\ell) = \int_0^{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n-u^2}} u^k v^\ell p(u, v) dv du$$

$$= c \int_0^{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n-u^2}} u^{2r+k-1} v^{2r+\ell-1} \left(1 - \frac{u^2}{n} - \frac{v^2}{n}\right)^{n-2r} dv du ,$$

حيث:

$$c = \frac{4}{n^{2r}} \frac{n!}{(r-1)!(n-2r)!} .$$

$$\therefore E(U^k V^\ell) = c \int_0^{\sqrt{n}} u^{2r+k-1} \left(1 - \frac{u^2}{n}\right)^{n-2r} \int_0^{\sqrt{n-u^2}} v^{2r+\ell-1} \left(1 - \frac{\frac{v^2}{n}}{1 - \frac{u^2}{n}}\right)^{n-2r} dv du .$$

بكتابة:

$$z_2 = \frac{\frac{v^2}{n}}{1 - \frac{u^2}{n}} \Rightarrow dv = \frac{\sqrt{n}}{2} \left(1 - \frac{u^2}{n}\right) \frac{1}{\sqrt{z_2}} dz_2 .$$

$$\begin{aligned} \therefore E(U^k V^\ell) &= \frac{c}{2} \int_0^{\sqrt{n}} u^{2r+k-1} \left(1 - \frac{u^2}{n}\right)^{n-2r} n \left(1 - \frac{u^2}{n}\right)^{r+\frac{\ell}{2}} \cdot \int_0^1 z_2^{r+\frac{\ell}{2}-1} (1-z_2)^{n-2r} dz_2 du \\ &= c' \int_0^{\sqrt{n}} u^{2r+k-1} \left(1 - \frac{u^2}{n}\right)^{n-r+\frac{\ell}{2}} B\left(r + \frac{\ell}{2}, n-2r+1\right) du, \end{aligned}$$

حيث:

$$c' = \frac{2}{n^{r-\ell}} \frac{n!}{(r-1)!(n-2r)!}$$

بكتابة:

$$y = \frac{u^2}{n} \Rightarrow du = \frac{\sqrt{n}}{2} y^{-\frac{1}{2}} dy .$$

$$\begin{aligned}\therefore E(U^k V^\ell) &= \frac{n^{(k+\ell)/2} n!}{(r-1)!(n-2r)!} \cdot B\left(r + \frac{\ell}{2}, n-2r+1\right) \cdot B\left(r + \frac{k}{2}, n-r + \frac{\ell}{2} + 1\right) \\ &= n^{\frac{k+\ell}{2}} \frac{n!}{(r-1)!} \frac{\Gamma(r + \frac{\ell}{2}) \Gamma(r + \frac{k}{2})}{\Gamma\left(r + \frac{k}{2} + \frac{\ell}{2} + 1\right)}\end{aligned}$$

بوضع $k = \ell = 1$ و $r = 1$ فإن:

$$E(U) = E(V) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} n^{\frac{3}{2}} \frac{(n-1)!}{(n + \frac{1}{2})!},$$

$$E(UV) = \frac{\pi}{4} n \frac{n!}{(n+1)!}.$$

باستخدام صيغة استرلنج وهي $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ فإننا نحصل على الصيغ التالية التقريبية:

$$\begin{aligned}E(U) = E(V) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} n^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2}} \frac{(n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{(n + \frac{1}{2})^{n+1}} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} n^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2}} \left[1 + \frac{3/2}{n-1}\right]^{-(n-1)} \frac{(n-2)^2}{(n + \frac{1}{2})^2} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{3}{2}} \left[1 + \frac{3/2}{n-1}\right]^{-(n-1)} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{-2} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[1 + \frac{1}{2(n-1)} \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{3(n-1)^2} \left(-\frac{3}{2}\right)^3 + \dots\right] \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{-2} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[1 - \frac{3}{8n} - \frac{45}{16n^2} - \dots\right] \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(UV) &= \frac{\pi}{4} n e \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \frac{n}{(n+1)^2} \\ &= \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} + \dots\right) \left[1 + \frac{1}{n}\right]^{-2} \\ &= \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{3}{2n} + \frac{5}{3n^2} \dots\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{4} \left[1 + o\left(\frac{1}{n}\right) \right] . \\
\therefore E\left(\frac{Y_n + Y_1}{2}\right) &= \frac{a+b}{2} . \\
\text{Var}\left(\frac{Y_n + Y_1}{2}\right) &= E\left[\frac{Y_n + Y_1}{2} - E\left(\frac{Y_n + Y_1}{2}\right)\right]^2 \\
&= \frac{1}{4} E[(Y_n - b) + (Y_1 - a)]^2 \\
&= \frac{1}{4} \left[\frac{(n-a)^2}{n+1} - \frac{(b-a)^2}{n} \frac{\pi}{4} \left\{ 1 + o\left(\frac{1}{n}\right) \right\} \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[\frac{(b-a)^2}{n} \left\{ 1 + o\left(\frac{1}{n}\right) \right\} - \frac{(b-a)^2}{n} \frac{\pi}{4} \left\{ 1 + o\left(\frac{1}{n}\right) \right\} \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[\frac{(b-a)^2}{4n} (4 - \pi) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \\
&= \frac{(b-a)^2}{16n} (4 - \pi) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) .
\end{aligned}$$

أيضا:

$$\begin{aligned}
E(Y_n - Y_1) &= (b-a) - \frac{-2(b-a)}{2n} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left\{ 1 + o\left(\frac{1}{n}\right) \right\} \\
&= (b-a) \left\{ 1 - \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \right\}^2 + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}(Y_n - Y_1) &= E[(Y_n - Y_1) - E(Y_n - Y_1)]^2 \\
&= E\left[(Y_n - b) - (Y_1 - a) + \frac{b-a}{\sqrt{2n}} \sqrt{\pi} \left\{ 1 + o\left(\frac{1}{n}\right) \right\}\right]^2 \\
&= \frac{(b-a)^2}{n} + \frac{(b-a)^2}{n} \frac{\pi}{4} + \left\{ 1 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\} - \frac{(b-a)^2}{n} \pi \left\{ 1 + o\left(\frac{1}{n}\right) \right\}^2 \\
&\quad + \frac{(b-a)^2}{2n} \pi \left\{ 1 + o\left(\frac{1}{n}\right) \right\}^2
\end{aligned}$$

$$= \frac{(b-a)^2}{n} - \frac{(b-a)^2}{n} \frac{\pi}{4} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{(b-a)^2}{4n} (4 - \pi) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

(٤-٥) توزيع لابلاس Laplace's Distribution

ليكن $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n$ الإحصاءات الترتيبية من عينة عشوائية مختارة من توزيع لابلاس بداله كثافة احتمال :

$$f(x) = \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x-a|}{b}}, \quad -\infty < x < \infty$$

سوف نعتبر $\frac{Y_n + Y_1}{2}$ مقدرا للمعلمه a و $\frac{Y_n - Y_1}{2}$ مقدار للمعلمه b .

الآن سوف ندرس خواص هذا المقدر عندما $x > a$ فإن:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2b} \int_a^x e^{-\left(\frac{t-a}{b}\right)} dt$$

$$= 1 - \frac{1}{2} e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)}.$$

عندما $x < a$ فإن:

$$F(x) = \frac{1}{2b} \int_{-\infty}^x e^{\frac{t-a}{b}} dt = \frac{1}{2} e^{\frac{x-a}{b}}.$$

بأخذ التحويلة :

$$\therefore w = nF(x) = \frac{n}{2} e^{(x-a)/b}.$$

(١٠٥)

$$\therefore X = a - b \ln \frac{n}{2} + b \ln W$$

أيضا التحويلة :

$$z = n[1 - F(y)] = \frac{n}{2} e^{\left(\frac{y-a}{b}\right)}$$

(٢٠٥)

$$\therefore Y = a + b \ln \frac{n}{2} - b \ln Z$$

ليكن :

$$v = -\ln w,$$

$$u = -\ln z.$$

من (١٠٥) و (٢٠٥) فإن:

$$X = a - b \ln \frac{n}{2} - bV,$$

$$Y = a + b \ln \frac{n}{2} + bU$$

ولكن نعلم أن نهايه التوزيعات لكل من Z , W هما:

$$h_1(w) = \frac{1}{(r-1)!} w^{r-1} e^{-w},$$

$$h_2(z) = \frac{1}{(r-1)!} z^{r-1} e^{-z}.$$

أيضا في النهايه فإن W , Z مستقلين. وعلى ذلك توزيع النهايه لكل من V , U هما:

$$g_1(v) = \frac{1}{\Gamma(r)} \exp[-rv - e^{-v}],$$

$$g_2(u) = \frac{1}{\Gamma(r)} \exp[-ru - e^{-u}].$$

أيضا في النهايه فإن U , $-V$ مستقلين.

$$\therefore E(V^k) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{-\infty}^{\infty} v^k \exp[-rv - e^{-v}] dv$$

بكتابة:

$$y = e^{-v} \Rightarrow dy = -e^{-v} dv$$

$$\begin{aligned} \therefore E(V^k) &= \frac{(-1)^k}{\Gamma(r)} \int_0^{\infty} (\ln y)^k y^{r-1} e^{-y} dy \\ &= (-1)^k \frac{\Gamma_{(r)}^{(k)}}{\Gamma(r)}. \end{aligned}$$

بنفس الشكل:

$$E(U^k) = (-1)^k \frac{\Gamma_{(r)}^{(k)}}{\Gamma(r)}$$

وعلى الأخص:

$$E(V) = E(U) = \frac{\Gamma'_{(r)}}{\Gamma(r)},$$

$$E(V^2) = E(U^2) = \frac{\Gamma''_{(r)}}{\Gamma(r)}$$

عندما $r=1$ فإن :

$$E(V) = E(U) = -\Gamma'_{(1)} = -\gamma$$

(حيث γ هو Euler's Constant)

$$E(V^2) = E(U^2) = -\Gamma''_{(1)} = \frac{\pi^2}{6} + \gamma^2 = 1.978112,$$

$$Y_1 = X = a - b \ln \frac{n}{2} - bV,$$

$$Y_n = Y = a + b \ln \frac{n}{2} + bU,$$

وعلى ذلك :

$$E\left(\frac{Y_n + Y_1}{2}\right) = a.$$

أى ان $\frac{Y_n + Y_1}{2}$ مقدرا غير متحيز للمعلمه a .

أيضا:

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\frac{Y_n + Y_1}{2}\right) &= \frac{1}{4} E[(Y_n + Y_1) - E(Y_n + Y_1)]^2 \\ &= \frac{b^2}{4} E(U - V)^2 = \frac{\pi^2 b^2}{12}. \end{aligned}$$

ايضا:

$$E\left(\frac{Y_n - Y_1}{2}\right) = b\left(\ln \frac{n}{2} - \gamma\right),$$

أيضا :

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\frac{Y_n - Y_1}{2}\right) &= \frac{1}{4} E\left[(Y_n - Y_1) - E(Y_n - Y_1)\right]^2 \\ &= \frac{b^2}{4} E(U + V + \gamma)^2 = \frac{b^2}{12} (\pi^2 + 3\gamma^2) \end{aligned}$$

(٥-٥) توزيع كوشي

Couchy's Distribution

ليكن $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n$ الإحصاءات الترتيبية لعينة عشوائية مختارة من توزيع كوشي بداله كثافة احتمال:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{b}{b^2 + (x-a)^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

سوف نعتبر $\frac{Y_n + Y_1}{2}$ مقدار للمعلمه a ، $Y_n - Y_1$ مقدرا للمعلمه b . الآن سوف ندرس خواص تلك المقدرات. ليكن :

$$\begin{aligned} w = n F(x) &= \frac{nb}{\pi} \int_{-\infty}^x \frac{1}{b^2 + (t-a)^2} dt \\ &= -\frac{n}{\pi} \text{Cot}^{-1}\left(\frac{x-a}{b}\right) \\ \therefore x &= a - b \text{Cot} \left(\frac{\pi w}{n}\right) \\ &= a - \frac{bn}{\pi w} + o\left(\frac{w}{n}\right). \end{aligned}$$

بنفس الشكل:

$$\begin{aligned} z = n[1 - F(y)] &= \frac{nb}{\pi} \int_y^{\infty} \frac{1}{b^2 + (t-a)^2} dt. \\ &= \frac{n}{\pi} \text{Cot}^{-1}\left(\frac{y-a}{b}\right) \\ \therefore y &= a + \frac{bn}{\pi z} + o\left(\frac{z}{n}\right). \end{aligned}$$

ليكن:

$$u = \frac{1}{w}, \quad v = \frac{1}{z}.$$

فإن:

$$X = a - \frac{bn}{\pi} U + o\left(\frac{1}{nU}\right),$$

$$Y = a + \frac{nb}{\pi} V + o\left(\frac{1}{nV}\right)$$

ولكن نعلم أن نهايه التوزيع لكل من Z, W هما:

$$g_1(w) = \frac{1}{(r-1)!} w^{r-1} e^{-w},$$

$$g_2(z) = \frac{1}{(r-1)!} z^{r-1} e^{-z}.$$

$$\therefore p_1(u) = \frac{1}{(r-1)!} u^{-r-1} e^{-\frac{1}{u}}$$

بنفس الشكل :

$$p_2(v) = \frac{1}{(r-1)!} v^{-r-1} e^{-1/v}.$$

أيضا U, V مستقلين . إذن:

$$E(U) = \frac{1}{(r-1)!} \int_{1/n}^{\infty} u^{-r} e^{-\frac{1}{u}} du$$

بكتابة:

$$y = \frac{1}{u} \Rightarrow dy = -\frac{1}{u^2} du.$$

$$\begin{aligned} \therefore E(U) &= \frac{1}{(r-1)!} \int_0^n y^{r-2} e^{-y} dy \\ &= \frac{\Gamma^{(r-1)}_{(n)}}{\Gamma(r)} = \frac{1}{r-1} I_n(r-1). \end{aligned}$$

ايضا :

$$E(U^2) = \frac{\Gamma^{(r-2)}_{(n)}}{\Gamma(r)} = \frac{1}{(r-1)(r-2)} I_n(r-1).$$

بنفس الشكل نتائج يمكن الحصول عليها بالنسبة لـ V .

عندما $r > 2$ فإن:

$$\begin{aligned}
 E\left[\frac{(Y_{n-r+1} + Y_r)}{2}\right] &= a, \\
 \text{Var}\left(\frac{Y_{n-r+1} + Y_r}{2}\right) &= \frac{1}{4} E[(Y_{n-r+1} + Y_r) - E(Y_{n-r+1} + Y_r)]^2 \\
 &= \frac{b^2 n^2}{4\pi^2} E(V - U)^2 \\
 &= \frac{b^2 n^2}{4\pi^2} \left[\frac{2}{(r-1)(r-2)} I_n(r-1) - \frac{2}{(r-1)^2} \{I_n(r-1)\}^2 \right] \\
 &= \frac{b^2 n^2}{4\pi^2} \left[\frac{2}{(r-1)(r-2)} - \frac{2}{(r-1)^2} + o(n) \right] \\
 &= \frac{1}{2(r-1)^2(r-2)} \left(\frac{bn}{\pi} \right)^2 + o(n).
 \end{aligned}$$

وبما أن هذا المقدر لا يتقارب في الاحتمال الى a ، أى ان هذا المقدر لا يمتلك صفه الكفايه ولكنه غير متحيز. أيضا:

$$\begin{aligned}
 E\left(\frac{Y_{n-r+1} - Y_r}{2}\right) &= \frac{bn}{\pi} \frac{1}{r-1} I_n(r-1) \\
 \text{Var}\left(\frac{Y_{n-r+1} - Y_r}{2}\right) &= \frac{1}{4} E[(Y_{n-r+1} - Y_r) - E(Y_{n-r+1} - Y_r)]^2 \\
 &= \frac{(bn)^2}{4\pi^2} E\left[V + U - \frac{2}{r-1} I_n\right]^2 = \frac{(bn)^2}{2\pi^2(r-1)^2(r-2)} + o(n).
 \end{aligned}$$

الباب السادس

تقدير الفترة لمعالم بعض التوزيعات
بالاعتماد علي الإحصاءات الترتيبية

(١-٦) مقدمة

قبل الدخول في الحصول على $100(1-\alpha)\%$ فترة ثقة لمعالم بعض التوزيعات بالاعتماد على الإحصاءات التربيعية ، سوف نقدم بصورة عامة الفكرة العامة لتكوين أقصر فترات ثقة لبعض التوزيعات وذلك لتسهيل الفهم.

(أ) $100(1-\alpha)\%$ فترة ثقة للمعلمة μ عندما σ^2 معلومة و $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

في حالة معرفة تباين المجتمع فإن : $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, $Z \sim N(0,1)$

$$\therefore P(a < Z < b) = 1 - \alpha$$

$$P\left(a < \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < b\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\bar{X} - \frac{\sigma b}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} - \frac{\sigma a}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

وتكون الفترة $\left(\bar{X} - \frac{b\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} - \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ هي $100(1-\alpha)\%$ فترة ثقة للمعلمة μ وان طول هذه الفترة هو :

$$\ell = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}[b - a].$$

ويجب اختيار a, b بحيث يكون طول الفترة ℓ أقل ما يمكن بشرط أن:

$$\int_a^b f(z) dz = 1 - \alpha \quad (٦.١)$$

الآن :

$$\frac{\partial \ell}{\partial a} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \left(\frac{\partial b}{\partial a} - 1 \right) = 0 \quad (٦.٢)$$

$$\therefore \frac{\partial b}{\partial a} = 1.$$

يلاحظ أن (١.٦) تعطى b كدالة في a وبتفاضل (١.٦) بالنسبة الى a :

$$\frac{\partial}{\partial a} \int_a^b f(z) dz = 1 - \alpha.$$

$$\therefore f(b) \frac{\partial b}{\partial a} - f(a) = 0$$

$$\frac{\partial b}{\partial a} = \frac{f(a)}{f(b)}$$

ومن (٢٥٦) فإن :

$$1 = \frac{f(a)}{f(b)}$$

$$\Rightarrow f(a) = f(b)$$

$$\therefore a = -b$$

ونحصل علي قيمه b من جدول التوزيع الطبيعي القياسي في ملحق (٢) حيث:

$$P(0 < Z < b) = 0.5 - \frac{\alpha}{2}$$

فإذا كانت $1 - \alpha = 0.95$ مثلاً فإن:

$$P(0 < Z < b) = 0.475.$$

وعلى ذلك :

$$a = -1.96, \quad b = 1.96.$$

(ب) $100(1 - \alpha)\%$ فترة ثقة للمعلمة μ عندما σ^2 غير معلومة حيث

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} \sim t_{n-1} \quad \text{و:}$$

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum (X - \bar{X})^2.$$

$$\therefore P \left(t_1 < \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}} < t_2 \right) = 1 - \alpha.$$

$$\therefore P \left(\bar{X} - t_2 \frac{S}{\sqrt{n-1}} < \mu < \bar{X} - t_1 \frac{S}{\sqrt{n-1}} \right),$$

$$\ell = \frac{S}{\sqrt{n-1}} [t_2 - t_1].$$

الآن :

$$\frac{\partial \ell}{\partial t_1} = \frac{S}{\sqrt{n-1}} \left[\frac{\partial t_2}{\partial t_1} - 1 \right] = 0$$

$$\therefore \frac{\partial t_2}{\partial t_1} = 1, \quad (3.6)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = 1 - \alpha.$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(x) dx = 0$$

$$\frac{\partial t_2}{\partial t_1} f(t_2) - f(t_1) = 0$$

$$\frac{\partial t_2}{\partial t_1} f(t_2) = f(t_1)$$

$$\frac{\partial t_2}{\partial t_1} = \frac{f(t_1)}{f(t_2)}.$$

ومن (3.6) فإن:

$$\frac{f(t_1)}{f(t_2)} = 1$$

$$\therefore f(t_1) = f(t_2)$$

$$t_1 = -t_2.$$

ويمكن الحصول على t_2 من جدول توزيع t في ملحق (4) حيث:

$$P(T > t_2) = \frac{\alpha}{2}.$$

فعندما $\alpha = 0.05$ فإن:

$$P(T > t_2) = 0.025$$

$$\text{أذن } v = n - 1 = 9, \quad n = 10, \quad t_1 = -2.262, \quad t_2 = 2.262$$

(ج) $100(1 - \alpha)\%$ فتره ثقته للتباين σ^2 عندما μ معروفه و $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum (X_j - \mu)^2$$

$$\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{\sum (X_j - \mu)^2}{\sigma^2}$$

$$\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi_{(n)}^2$$

$$P\left(v_1 < \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} < v_2\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{n\hat{\sigma}^2}{v_2} < \sigma^2 < \frac{n\hat{\sigma}^2}{v_1}\right) = 1 - \alpha.$$

الآن :

$$\ell = n\hat{\sigma}^2 \left[\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right] = 0$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial v_1} = n\hat{\sigma}^2 \left[\frac{-1}{v_1^2} + \frac{\partial v_2}{\partial v_1} \cdot \frac{1}{v_2^2} \right] = 0$$

$$\frac{1}{v_1^2} = \frac{\partial v_2}{\partial v_1} \cdot \frac{1}{v_2^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial v_2}{\partial v_1} = \frac{v_2^2}{v_1^2}},$$

(٤٠٦)

$$\int_{v_1}^{v_2} f(t) dt = 1 - \alpha$$

$$\frac{\partial}{\partial v_1} \int_{v_1}^{v_2} f(t) dt = 1 - \alpha$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial v_1} f(v_2) - f(v_1) = 0$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial v_1} = \frac{f(v_1)}{f(v_2)}$$

$$\therefore \frac{f(v_1)}{f(v_2)} = \frac{v_2^2}{v_1^2} \Rightarrow v_1^2 f(v_1) = v_2^2 f(v_2).$$

أى أن مربع v_1 مضروب في العمود المقام عند $v_1 =$ مربع v_2 مضروب في العمود المقام عند v_2 .

(٦-٢) فترة ثقه لمعالم بعض التوزيعات بالاعتماد على الاحصاءات الترتيبية

(أ) $100(1 - \alpha)\%$ فترة ثقة للمعلمة θ تحت فرض دالة كثافة الاحتمال :

$$f(x) = \frac{1}{\theta}, \quad 0 < x < \theta,$$

إذا كانت X_1, X_2, \dots, X_n عينه مختاره من هذا التوزيع فإن داله الامكان هي:

$$L \propto \prod_{j=1}^n \frac{1}{\theta}$$

$$\therefore L = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n} & 0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n < \theta \\ 0 & \text{, e.w.} \end{cases}$$

حيث $\hat{\theta} = Y_n$ احصاء كافى للمعلم θ .

ليكن $Y = Y_n$

ليكن $0 < y < \theta$

دالة كثافة الاحتمال للاحصاء الترتيبى من الرتبة n (Y_n) هو:

$$g_n(y) = \frac{n y^{n-1}}{\theta^n}$$

ليكن :

$$u = \frac{y}{\theta},$$

$$\therefore f(u) = n u^{n-1} \quad 0 < u < 1.$$

ويمكن اختيار u_1, u_2 بحيث أن:

$$\int_{u_1}^{u_2} n u^{n-1} du = u_2^n - u_1^n = 1 - \alpha. \quad (5.6)$$

$$\therefore P\left(u_1 < \frac{Y_n}{\theta} < u_2\right) = 1 - \alpha.$$

$$P\left(\frac{Y_n}{u_2} < \theta < \frac{Y_n}{u_1}\right) = 1 - \alpha. \quad (6.6)$$

$$\therefore \ell = Y_n \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right),$$

$$P(u_1 < U < u_2) = 1 - \alpha.$$

نلاحظ أن اقصر فتره عندما تكون $u_2 = 1$ ويمكن أثبات ذلك جبريا كمايلي:
من (٦٠٥) نلاحظ أن:

$$0 = nu_2^{n-1} - nu_1^{n-1} \frac{\partial u_1}{\partial u_2} \Rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial u_2} = \left(\frac{u_2}{u_1} \right)^{n-1}$$

ومن (٦٠٦) نلاحظ أن :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial u_2} &= -\frac{Y_n}{u_1^2} \frac{\partial u_1}{\partial u_2} + \frac{Y_n}{u_2^2} = -\frac{Y_n}{u_1^2} \left(\frac{u_2}{u_1} \right)^{n-1} + \frac{Y_n}{u_2^2} \\ &= -Y_n \frac{(u_2^{n+1} - u_1^{n+1})}{u_2^2 u_1^{n+1}} < 0 \end{aligned}$$

وهذا يعني أن ℓ داله تناقصيه في u_2 وتكون أقل قيمه لها عندما يكون u_2 اكبر ما يمكن أى
عندما $u_2 = 1$.

$$\therefore P(u_1 < U < 1) = 1 - \alpha$$

$$1 - P(U < u_1) = 1 - \alpha$$

$$P(U < u_1) = \alpha$$

$$\int_0^{u_1} nu^{n-1} du = \alpha$$

$$u_1^n = \alpha$$

$$u_1 = \alpha^{\frac{1}{n}}$$

$$\therefore P\left(\alpha^{\frac{1}{n}} < \frac{Y_n}{\theta} < 1\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(Y_n < \theta < \frac{Y_n}{\alpha^{\frac{1}{n}}}\right) = 1 - \alpha$$

وعلي ذلك الفتره:

$$\ell = \left[Y_n, \frac{Y_n}{\alpha^{\frac{1}{n}}} \right]$$

تمثل أقصر فترة ثقة لـ θ .

(ب) $100(1 - \alpha)\%$ فترة ثقة للمعلمة θ تحت فرض دالة كثافة الاحتمال.

$$f(x) = e^{-(x-\theta)} \quad x > \theta, 0 \text{ e.w.}$$

الإحصاء الترتيبي Y_1 إحصاء كافى للمعلم θ .

داله كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبي Y_1 هي:

$$g_1(y) = n e^{-n(y-\theta)} \quad , y > \theta.$$

ليكن :

$$u = 2n(y - \theta) \quad , Y = Y_1$$

$$f_U(u) = \frac{1}{2} e^{-\frac{u}{2}} \quad , u > 0 .$$

$$P(u_1 < U < u_2) = 1 - \alpha$$

$$P(0 < U < u_2) = 1 - \alpha$$

$$P(U < u_2) = 1 - \alpha$$

$$\int_0^{u_2} \frac{1}{2} e^{-\frac{u}{2}} du = 1 - \alpha$$

$$\therefore 1 - e^{-\frac{u}{2}} = 1 - \alpha .$$

$$-\frac{u}{2} = \ln \alpha$$

$$u_2 = -2 \ln \alpha$$

$$P(0 < U < -2 \ln \alpha) = 1 - \alpha .$$

إذن أقصر فترة ثقه للمعلم θ هي $\ell = (0, -2 \ln \alpha)$.

(ج) $100(1-\alpha)\%$ فترة ثقة لمعلمه الشكل في توزيع واييل.

ليكن :

$$X = Y_r, \quad Y = Y_s, \quad r < s.$$

$$g_{r,s}(x, y) = K f(x) f(y) [F(x)]^{r-1} [F(y) - F(x)]^{s-r-1} \cdot [1-F(y)]^{n-s},$$

$$K = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}.$$

$$\begin{aligned} \therefore g_{r,s}(x, y) &= K \frac{b^2}{\theta^2} x^{b-1} y^{b-1} e^{-\frac{x^b}{\theta}} e^{-\frac{y^b}{\theta}} \\ &\cdot \left(1 - e^{-\frac{x^b}{\theta}}\right)^{r-1} \left(e^{-\frac{x^b}{\theta}} - e^{-\frac{y^b}{\theta}}\right)^{s-r-1} e^{-\frac{y^b}{\theta}(n-s)} \\ &= K \frac{b^2}{\theta^2} x^{b-1} y^{b-1} \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r-1}{i} (-1)^i e^{-\frac{x^b}{\theta} i} \\ &\cdot e^{-\frac{y^b(n-s)}{\theta}} e^{-\frac{x^b}{\theta}} e^{-\frac{y^b}{\theta}} \sum_{j=0}^{s-r-1} \binom{s-r-1}{j} (-1)^j e^{-\frac{y^b}{\theta} j} e^{-\frac{x^b}{\theta}(s-r-j-1)} \\ &= K \frac{b^2}{\theta^2} x^{b-1} y^{b-1} \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{s-r-1} C_{ij} e^{-\frac{x^{b(i+s-r-j-1+1)}}{\theta}} \\ &\cdot e^{-\frac{y^{b(j+n-s+1)}}{\theta}}, \end{aligned}$$

حيث :

$$C_{ij} = \binom{s-r-1}{j} \binom{r-1}{i} (-1)^{i+j}$$

$$\therefore g_{r,s}(x, y) = K \frac{b^2}{\theta^2} x^{b-1} y^{b-1} \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{s-r-1} C_{ij} \cdot e^{-\frac{x^b}{\theta}(s-r-j+i)} \cdot e^{-\frac{y^{b(j+1+n-s)}}{\theta}}$$

ليكن:

$$A = s - r - j + i, \quad a = j + 1 + n - s$$

$$\begin{aligned} g_{r,s}(x, y) &= K \frac{b^2}{\theta^2} x^{b-1} y^{b-1} \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{s-r-1} C_{ij} \\ &\cdot e^{-\frac{[Ax^b + ay^b]}{\theta}} \end{aligned}$$

ليكن :

$$z = \frac{x}{y}, \quad y = y$$

$$\therefore x = y z$$

دالة كثافة الاحتمال للمتغير Z هي :

$$\begin{aligned} g(z) &= \int_0^{\infty} |y| g_{r,s}(zy, y) dy \\ &= \int_0^{\infty} \frac{K b^2}{\theta^2} (zy)^{b-1} y^{b-1} |y| \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{s-r-1} C_{ij} \\ &\quad \cdot \exp \left[-\frac{1}{\theta} [A(zy)^b + ay^b] \right] dy \\ &= \frac{b^2 K}{\theta^2} z^{b-1} \int_0^{\infty} y^{2b-1} \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{s-r-1} C_{ij} \\ &\quad \cdot \exp \left[-\frac{y^b}{\theta} (Az^b + a) \right] dy \quad (7.6) \\ &= \frac{b^2 K}{\theta^2} z^{b-1} \int_0^{\infty} y^{2b-1} \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{s-r-1} C_{ij} \\ &\quad \cdot \exp \left[-\frac{y^b A}{\theta} (z^b + \rho) \right] dy \end{aligned}$$

حيث :

$$\rho = \frac{a}{A},$$

$$b > 1.$$

للحصول على أقصر $100(1 - \alpha)\%$ فترة ثقة نتبع الآتي :

ليكن :

$$U = -b \ln Z,$$

فإن دالة كثافة الاحتمال للمتغير U نحصل عليها من (7.6) كالتالي:

$$f_U(u) = K e^{-u} \sum_{j=0}^{s-r-1} \sum_{i=0}^{r-1} C_{ij} \quad (8.6)$$

$$\cdot A^{-2} [\rho + \exp(u)]^{-2}, \quad u > 0.$$

الجملة الاحتمالية التالية:

$$P(u_0 < U < u_1) = 1 - \alpha$$

تحويل إلى :

$$P(u_0 < -b \ln Z < u_1) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{u_0}{\ln Z} < -b < \frac{u_1}{\ln Z}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{u_1}{-\ln Z} < b < \frac{u_0}{-\ln Z}\right) = 1 - \alpha$$

وعلى ذلك $100(1 - \alpha)\%$ فتره ثقته تكون كالتالى:

$$\begin{array}{cc} \text{الحد الاعلى} & \text{الحد الادنى} \\ \left(\frac{u_0}{-\ln Z}, \frac{u_1}{-\ln Z}\right) & \\ , & \\ 0 < Z < 1 & \end{array}$$

اسلوب إيجاد أقصر فترة ثقة ذات جانبيين يمكن ان يختزل الى حل المعادلتين التاليتين آنيا :

$$f_U(u_0) = f_U(u_1),$$

$$\int_{u_0}^{u_1} f_U(u) du = 1 - \alpha, \quad (٩٠٦)$$

حيث $f_U(u_0)$ كما في (٨٠٦).

الآن أقصر فترة ثقة ذات جانبيين لـ b هي:

$$\left(\frac{u_1}{-\ln Z}, \frac{u_0}{-\ln Z}\right) \text{ حيث } u_0, u_1 \text{ يمكن الحصول عليها بحل المعادلتين التاليتين آنيا:}$$

$$\begin{aligned} & K \sum_{j=0}^{s-r-1} \sum_{i=0}^{r-1} C_{ij} A^{-2} \exp(-u_0) [\rho + \exp(-u_0)]^{-2} \\ & = K \sum_{j=0}^{s-r-1} \sum_{i=0}^{r-1} C_{ij} A^{-2} \exp(-u_1) [\rho + \exp(-u_1)]^{-2} \\ & \Rightarrow \sum_{j=0}^{s-r-1} \sum_{i=0}^{r-1} C_{ij} A^{-2} \left[\frac{\exp(-u_0)}{[\rho + \exp(-u_0)]^2} - \frac{\exp(u_1)}{[\rho + \exp(-u_1)]^2} \right] = 0, \\ & \int_{u_0}^{u_1} f_U(u) du = 1 - \alpha \end{aligned}$$

$$\therefore K \int_{u_0}^{u_1} \sum_{j=1}^{s-r-1} \sum_{i=1}^{r-1} C_{ij} A^{-2}$$

$$\cdot \exp\{-u\} \{\rho + \exp(-u)\}^{-2} du = 1 - \alpha$$

$$e^{-u} = y$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{s-r-1} C_{ij} A^{-2} \int_{e^{-u_1}}^{e^{-u_0}} (\rho + y)^{-2} dy \\ = \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{s-r-1} C_{ij} A^{-2} \left[\frac{(\rho + y)^{-1}}{-1} \right]_{e^{-u_1}}^{e^{-u_0}} \\ = \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{s-r-1} C_{ij} A^{-2} \frac{(\rho + e^{-u_0})^{-1} - (\rho + e^{-u_1})^{-1}}{-1} \\ = \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{s-r-1} C_{ij} A^{-2} \left[(\rho + e^{-u_1})^{-1} - (\rho + e^{-u_0})^{-1} \right] \\ = \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{s-r-1} C_{ij} A^{-2} \left[\frac{e^{-u_0} - e^{-u_1}}{(\rho + e^{-u_0})(\rho + e^{-u_1})} \right] \\ = [\exp(-u_0) - \exp(-u_1)] \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{s-r-1} C_{ij} A^{-2} \\ \cdot \left[\{\rho + \exp(-u_0)\} \{\rho + \exp(-u_1)\} \right]^{-1} = \frac{1 - \alpha}{K}. \end{aligned}$$

هذا ويتم حل المعادلات السابقة باستخدام الحاسب الآلي.

الباب السابع

الإحصاءات الترتيبية لمتغيرات عشوائية
مستقلة وغير متطابقة التوزيع

نشأت فكرة الإحصاءات الترتيبية لمتغيرات عشوائية غير متطابقة التوزيع منذ عام ١٩٦٥ حيث تم التوصل الى بعض النتائج الخاصة بها وذلك بالاعتماد على حسابات جبرية معقدة، ولا زال هناك الكثير من الصعوبات في التوصل إلى علاقات واضحة في جوانب متعددة. هذا وقد عرض بعض الباحثين ما توصلوا إليه من حيث ذكر صور دوال الكثافة ودوال التوزيع للإحصاءات الترتيبية من متغيرات مستقلة متصلة غير متطابقة التوزيع ثم التعبير عن تلك الصورة في شكل Permanent او ما يسمى دائم ، إذا إن تلك الصورة مكنت الباحثين من استخدام بعض خواص Permanent لإثبات بعض العلاقات التكرارية لدوال الكثافة ودوال التوزيع.

(٧-١) مفاهيم أساسية:

(٧-١-١) الدائم Permanent :

هو محدد لمصفوفه مربعه فيما عدا أن كل الاشارات عند فكه موجبة وسوف نرمز له بالرمز:

$$\text{per} \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} + & \\ & + \end{vmatrix}.$$

فعلى سبيل المثال:

$$\begin{vmatrix} + & 1 & 1 \\ & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$\begin{vmatrix} + & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3! = 6,$$

$$\begin{vmatrix} + & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = n!,$$

$$\begin{vmatrix} + & a & b \\ & c & d \end{vmatrix} = ad + bc.$$

والدائم له الخواص الآتية:

$$\text{per} |A| = \text{per} |A^T| \quad -١$$

حيث A^T هي المنقول للمصفوفة A .

٢- لا تتغير قيمة دائم المصفوفة بتبديل صفوفها أو أعمدتها .

ولمزيد من المعلومات عن الدائم يمكن الرجوع إلى (1987), (1983) Minc .

(٧-١-٢) دالة كثافة الاحتمال المشتركة لـ n من الإحصاءات الترتيبية لمتغيرات مستقلة وغير متطابقة التوزيع:

The Probability Density Function of n Order Statistics for Independent and Non Identically Distributed Variables:

لتكن X_1, \dots, X_n متغيرات عشوائية مستقلة وغير متطابقة التوزيع بدوال كثافة احتمالية $f_1(x), \dots, f_n(x)$ ودوال توزيع تجميعيه $F_1(x), \dots, F_n(x)$ على التوالي وكانت $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n$ الإحصاءات الترتيبية التي نحصل عليها بترتيب المتغيرات ترتيباً تصاعدياً، وعلي ذلك فإن دالة كثافة الاحتمال المشتركة لـ n من الإحصاءات الترتيبية لمتغيرات مستقلة وغير متطابقة التوزيع تعطى بالصورة التالية :

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_p f_{i_1}(x_1) f_{i_2}(x_2) \dots f_{i_n}(x_n) \quad (١٠٧)$$

حيث \sum_p مجموع كل التبديلات على i_1, i_2, \dots, i_n وعددها $n!$. فعلى سبيل المثال عندما $n=3$ فإن داله كثافة الاحتمال للمتغيرات Y_1, Y_2, Y_3 هي:

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2, x_3) = & f_1(x_1) f_2(x_2) f_3(x_3) + f_1(x_1) f_3(x_2) f_2(x_3) \\ & + f_2(x_1) f_1(x_2) f_3(x_3) + f_2(x_1) f_3(x_2) f_1(x_3) \\ & + f_3(x_1) f_1(x_2) f_2(x_3) + f_3(x_1) f_2(x_2) f_1(x_3). \end{aligned}$$

وقد عبر Vughan and Venables (1972) عن (١٠٧) في صورة دائم على النحو التالي:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_n) & \dots & f_n(x_n) \end{vmatrix}^+$$

فعلى سبيل المثال إذا كانت X_1, X_2, \dots, X_n متغيرات عشوائية تتبع التوزيع الاسي بدوال كثافة احتمالية:

$$f_i(x) = \frac{1}{\theta_i} e^{-\frac{x}{\theta_i}}, \quad x \geq 0, \theta_i > 0,$$

ودوال توزيع تجميعيه:

$$F_i(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\theta_i}},$$

فإن داله كثافة الاحتمال المشتركة لـ n من الاحصاء الترتيبية لمتغيرات مستقلة وغير متطابقة التوزيع هي:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{x_1}{\theta_1}} & \dots & \frac{1}{\theta_n} e^{-\frac{x_1}{\theta_n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{x_n}{\theta_1}} & \dots & \frac{1}{\theta_n} e^{-\frac{x_n}{\theta_n}} \end{vmatrix}^+$$

مثال (٧-١-١):

لتكن المتغيرات Y_1, Y_2, \dots, Y_4 تتبع توزيعات أسية بدوال كثافة احتمالية:

$$f_i(x) = \frac{1}{\theta_i} e^{-\frac{x}{\theta_i}}, \quad x > 0, \theta_i > 0,$$

ودوال توزيع تجميعية:

$$F_i(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\theta_i}}, \quad x > 0, \theta_i > 0.$$

فإن داله كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات Y_1, Y_2, \dots, Y_4 هي:

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{x_1}{\theta_1}} & \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{x_1}{\theta_2}} & \frac{1}{\theta_3} e^{-\frac{x_1}{\theta_3}} & \frac{1}{\theta_4} e^{-\frac{x_1}{\theta_4}} \\ \frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{x_2}{\theta_1}} & \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{x_2}{\theta_2}} & \frac{1}{\theta_3} e^{-\frac{x_2}{\theta_3}} & \frac{1}{\theta_4} e^{-\frac{x_2}{\theta_4}} \\ \frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{x_3}{\theta_1}} & \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{x_3}{\theta_2}} & \frac{1}{\theta_3} e^{-\frac{x_3}{\theta_3}} & \frac{1}{\theta_4} e^{-\frac{x_3}{\theta_4}} \\ \frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{x_4}{\theta_1}} & \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{x_4}{\theta_2}} & \frac{1}{\theta_3} e^{-\frac{x_4}{\theta_3}} & \frac{1}{\theta_4} e^{-\frac{x_4}{\theta_4}} \end{vmatrix}^+$$

(٧-١-٣): دالة كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبي من الرتبة r (Y_r) :

$$g_r(x) = \frac{1}{(r-1)!(n-r)!} \begin{vmatrix} F_1(x) & F_2(x) & \dots & F_n(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_1(x) & F_2(x) & \dots & F_n(x) \\ f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ 1-F_1(x) & 1-F_2(x) & \dots & 1-F_n(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1-F_1(x) & 1-F_2(x) & \dots & 1-F_n(x) \end{vmatrix} \begin{matrix} \left. \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \right\} (r-1) \text{ rows} \\ \leftarrow (1) \text{ row} \\ \left. \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \right\} (n-r) \text{ rows} \end{matrix}$$

(٢٠٧)

مثال (٧-١-٢):

لتكن X_1, X_2, \dots, X_n متغيرات عشوائية تتبع الأسى بدوال كثافة احتمالية:

$$f_i(x) = \frac{1}{\theta_i} e^{-\frac{x}{\theta_i}}, \quad x \geq 0, \theta_i > 0$$

ودوال توزيع تجميعيه:

$$F_i(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\theta_i}}, \quad x \geq 0, \theta_i > 0.$$

فإن داله كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبي من الرتبة r من توزيعات اسيه تكون علي الصورة التالية:

$$g_r(x) = \frac{1}{(r-1)!(n-r)!} \begin{vmatrix} 1 - e^{-\frac{x}{\theta_1}} & 1 - e^{-\frac{x}{\theta_2}} & \dots & 1 - e^{-\frac{x}{\theta_n}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 - e^{-\frac{x}{\theta_1}} & 1 - e^{-\frac{x}{\theta_2}} & \dots & 1 - e^{-\frac{x}{\theta_n}} \\ \frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{x}{\theta_1}} & \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{x}{\theta_2}} & \dots & \frac{1}{\theta_n} e^{-\frac{x}{\theta_n}} \\ e^{-\frac{x}{\theta_1}} & e^{-\frac{x}{\theta_2}} & \dots & e^{-\frac{x}{\theta_n}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{-\frac{x}{\theta_1}} & e^{-\frac{x}{\theta_2}} & \dots & e^{-\frac{x}{\theta_n}} \end{vmatrix} \begin{matrix} \left. \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \right\} (r-1) \text{ rows} \\ \leftarrow (1) \text{ row} \\ \left. \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \right\} (n-r) \text{ rows} \end{matrix}$$

وبوضع $r+1$ بدلا من r في (٢٠٧) نحصل على دالة كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبي Y_{r+1} كالتالي:

$$g_{r+1}(x) = \frac{1}{r!(n-r-1)!} \begin{vmatrix} F_1(x) & F_2(x) & \dots & F_n(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_1(x) & F_2(x) & \dots & F_n(x) \\ f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ 1-F_1(x) & 1-F_2(x) & \dots & 1-F_n(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1-F_1(x) & 1-F_2(x) & \dots & 1-F_n(x) \end{vmatrix}^+ \begin{matrix} \left. \begin{matrix} (r) \text{ rows} \\ (1) \text{ row} \end{matrix} \right\} \\ (n-r-1) \text{ rows} \end{matrix}$$

(٤-١-٧) دالة كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبي الأول (Y_1) :

$$g_1(x) = \frac{1}{(n-1)!} \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ 1-F_1(x) & 1-F_2(x) & \dots & 1-F_n(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1-F_1(x) & 1-F_2(x) & \dots & 1-F_n(x) \end{vmatrix}^+ \begin{matrix} \left. \begin{matrix} 1 \text{ row} \\ n-1 \text{ rows} \end{matrix} \right\} \end{matrix}$$

(٥-١-٧) دالة كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبي من الرتبة n (Y_n) :

$$g_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \begin{vmatrix} F_1(x) & F_2(x) & \dots & F_n(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_1(x) & F_2(x) & \dots & F_n(x) \\ f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \end{vmatrix}^+ \begin{matrix} \left. \begin{matrix} (n-1) \text{ rows} \\ (1) \text{ row} \end{matrix} \right\} \end{matrix}$$

للمثال (٢-١-٧) ويوضح $r=1$, $n=4$ فإن دالة كثافته الاحتمال للإحصاء الترتيبي Y_1 هي :

$$g_1(x) = \frac{1}{3!} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{x}{\theta_1}} & \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{x}{\theta_2}} & \frac{1}{\theta_3} e^{-\frac{x}{\theta_3}} & \frac{1}{\theta_4} e^{-\frac{x}{\theta_4}} \\ e^{-\frac{x}{\theta_1}} & e^{-\frac{x}{\theta_2}} & e^{-\frac{x}{\theta_3}} & e^{-\frac{x}{\theta_4}} \\ e^{-\frac{x}{\theta_1}} & e^{-\frac{x}{\theta_2}} & e^{-\frac{x}{\theta_3}} & e^{-\frac{x}{\theta_4}} \\ e^{-\frac{x}{\theta_1}} & e^{-\frac{x}{\theta_2}} & e^{-\frac{x}{\theta_3}} & e^{-\frac{x}{\theta_4}} \end{vmatrix}^+$$

وداله كثافه الاحتمال للإحصاء الترتيبى Y_2 هي:

$$g_2(x) = \frac{1}{2!} = \begin{vmatrix} 1 - e^{-\frac{x}{\theta_1}} & 1 - e^{-\frac{x}{\theta_2}} & 1 - e^{-\frac{x}{\theta_3}} & 1 - e^{-\frac{x}{\theta_4}} \\ \frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{x}{\theta_1}} & \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{x}{\theta_2}} & \frac{1}{\theta_3} e^{-\frac{x}{\theta_3}} & \frac{1}{\theta_4} e^{-\frac{x}{\theta_4}} \\ e^{-\frac{x}{\theta_1}} & e^{-\frac{x}{\theta_2}} & e^{-\frac{x}{\theta_3}} & e^{-\frac{x}{\theta_4}} \\ e^{-\frac{x}{\theta_1}} & e^{-\frac{x}{\theta_2}} & e^{-\frac{x}{\theta_3}} & e^{-\frac{x}{\theta_4}} \end{vmatrix}^+$$

وداله كثافه الاحتمال للإحصاء الترتيبى Y_3 هي:

$$g_3(x) = \frac{1}{2!} = \begin{vmatrix} 1 - e^{-\frac{x}{\theta_1}} & 1 - e^{-\frac{x}{\theta_2}} & 1 - e^{-\frac{x}{\theta_3}} & 1 - e^{-\frac{x}{\theta_4}} \\ 1 - e^{-\frac{x}{\theta_1}} & 1 - e^{-\frac{x}{\theta_2}} & 1 - e^{-\frac{x}{\theta_3}} & 1 - e^{-\frac{x}{\theta_4}} \\ \frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{x}{\theta_1}} & \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{x}{\theta_2}} & \frac{1}{\theta_3} e^{-\frac{x}{\theta_3}} & \frac{1}{\theta_4} e^{-\frac{x}{\theta_4}} \\ e^{-\frac{x}{\theta_1}} & e^{-\frac{x}{\theta_2}} & e^{-\frac{x}{\theta_3}} & e^{-\frac{x}{\theta_4}} \end{vmatrix}^+$$

وداله كثافه الاحتمال للإحصاء الترتيبى Y_4 هي:

$$g_4(x) = \frac{1}{3!} = \begin{vmatrix} 1 - e^{-\frac{x}{\theta_1}} & 1 - e^{-\frac{x}{\theta_2}} & 1 - e^{-\frac{x}{\theta_3}} & 1 - e^{-\frac{x}{\theta_4}} \\ 1 - e^{-\frac{x}{\theta_1}} & 1 - e^{-\frac{x}{\theta_2}} & 1 - e^{-\frac{x}{\theta_3}} & 1 - e^{-\frac{x}{\theta_4}} \\ 1 - e^{-\frac{x}{\theta_1}} & 1 - e^{-\frac{x}{\theta_2}} & 1 - e^{-\frac{x}{\theta_3}} & 1 - e^{-\frac{x}{\theta_4}} \\ \frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{x}{\theta_1}} & \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{x}{\theta_2}} & \frac{1}{\theta_3} e^{-\frac{x}{\theta_3}} & \frac{1}{\theta_4} e^{-\frac{x}{\theta_4}} \end{vmatrix}^+$$

(٧-١-٦) دالة كثافة الاحتمال المشتركة لإحصاءين ترتيبيين Y_{k_1}, Y_{k_2} :

وقد وضعت هذه الدالة من قبل Vughan and Venables (1972) في صورة دائم

كالتالي:

$$(1 \leq k_1 < k_2 \leq n)$$

$$g_{k_1, k_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{(k_1-1)!(k_2-k_1-1)!(n-k_2)!} \times$$

$F_1(x_1)$	$F_2(x_1)$	\dots	$F_n(x_1)$	$\left. \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} (k_1-1) \text{ rows}$
\vdots	\vdots		\vdots	
$F_1(x_1)$	$F_2(x_1)$	\dots	$F_n(x_1)$	$\left. \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} (k_1-1) \text{ rows}$
$f_1(x_1)$	$f_2(x_1)$	\dots	$f_n(x_1)$	
$F_1(x_2) - F_1(x_1)$	$F_2(x_2) - F_2(x_1)$	\dots	$F_n(x_2) - F_n(x_1)$	$\left. \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} (k_2 - k_1 - 1) \text{ rows}$
\vdots	\vdots		\vdots	
$F_1(x_2) - F_1(x_1)$	$F_2(x_2) - F_2(x_1)$	\dots	$F_n(x_2) - F_n(x_1)$	$\left. \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} (k_2 - k_1 - 1) \text{ rows}$
$f_1(x_2)$	$f_2(x_2)$	\dots	$f_n(x_2)$	
$1 - F_1(x_2)$	$1 - F_2(x_2)$	\dots	$1 - F_n(x_2)$	$\left. \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} (n - k_2) \text{ rows}$
\vdots	\vdots		\vdots	
$1 - F_1(x_1)$	$1 - F_2(x_2)$	\dots	$1 - F_n(x_n)$	$\left. \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} (n - k_2) \text{ rows}$

(٣٠٧)

تحت فرض التوزيع الاسي فإن دالة التوزيع المشتركة للإحصاءين الترتيبين Y_4, Y_1 و $n=4$ هي:

$$g_{1,4}(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{x_1}{\theta_1}} & \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{x_1}{\theta_2}} & \frac{1}{\theta_3} e^{-\frac{x_1}{\theta_3}} & \frac{1}{\theta_4} e^{-\frac{x_1}{\theta_4}} \\ e^{-\frac{x_2}{\theta_1}} - e^{-\frac{x_1}{\theta_1}} & e^{-\frac{x_2}{\theta_2}} - e^{-\frac{x_1}{\theta_2}} & e^{-\frac{x_2}{\theta_3}} - e^{-\frac{x_1}{\theta_3}} & e^{-\frac{x_2}{\theta_4}} - e^{-\frac{x_1}{\theta_4}} \\ e^{-\frac{x_2}{\theta_1}} - e^{-\frac{x_1}{\theta_1}} & e^{-\frac{x_2}{\theta_2}} - e^{-\frac{x_1}{\theta_2}} & e^{-\frac{x_2}{\theta_3}} - e^{-\frac{x_1}{\theta_3}} & e^{-\frac{x_2}{\theta_4}} - e^{-\frac{x_1}{\theta_4}} \\ \frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{x_2}{\theta_1}} & \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{x_2}{\theta_2}} & \frac{1}{\theta_3} e^{-\frac{x_2}{\theta_3}} & \frac{1}{\theta_4} e^{-\frac{x_2}{\theta_4}} \end{vmatrix}^+$$

حالات خاصة:

أ- دالة كثافة الاحتمال المشتركة للإحصاءين الترتيبين Y_1, Y_n

Joint Probability Density Function of the First and the Last Order Statistics (Y_1, Y_n) :

بوضع $k_1 = 1, k_2 = n$ في (٣٠٧) نحصل على:

$$g_{1,n}(x_1, x_2) = [(n-2)!]^{-1} \times$$

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ F_1(x_2) - F_1(x_1) & F_2(x_2) - F_2(x_1) & \dots & F_n(x_2) - F_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_1(x_2) - F_1(x_1) & F_2(x_2) - F_2(x_1) & \dots & F_n(x_2) - F_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \dots & f_n(x_2) \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1 \text{ row} \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} F_1(x_2) - F_1(x_1) \\ \vdots \\ F_1(x_2) - F_1(x_1) \end{matrix}} \right\} (n-2) \text{ rows} \\ \leftarrow 1 \text{ row} \end{matrix}$$

(ب) دالة كثافة الاحتمال المشتركة للاحصاءيين الترتيبين المتتاليين Y_{k_1}, Y_{k_1+1}

Joint Probability Density Function of (Y_{k_1}, Y_{k_1+1}) :

بوضع $k_2 = k_1 + 1$ في (٣٠٧) نحصل على:

$$g_{k_1, k_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{(k_1-1)!(n-k_1-1)!} \times$$

$$\begin{vmatrix} F_1(x_1) & F_2(x_1) & \dots & F_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_1(x_1) & F_2(x_1) & \dots & F_n(x_1) \\ f_1(x_1) & f_2(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & & f_n(x_2) \\ 1 - F_1(x_2) & 1 - F_2(x_2) & \dots & 1 - F_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 - F_1(x_2) & 1 - F_2(x_2) & \dots & 1 - F_n(x_2) \end{vmatrix} \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} F_1(x_1) \\ \vdots \\ F_1(x_1) \end{matrix}} \right\} (k_1-1) \text{ rows} \\ \leftarrow (1) \text{ row} \\ \leftarrow (1) \text{ row} \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} 1 - F_1(x_2) \\ \vdots \\ 1 - F_1(x_2) \end{matrix}} \right\} (n-k_1-1) \text{ rows} \end{matrix}$$

مثال (٣-١-٧):

اوجد داله كثافة الاحتمال لاحصاءيين ترتيبيين متتاليين Y_{k_1}, Y_{k_1+1} تحت فرض التوزيع الأسّي.

الحل:

من (ب) فإن :

$$g_{k_1, k_1+1}(x_1, x_2) = \frac{1}{(k_1 - 1)!(n - k_1 - 1)!} \times$$

$$\begin{vmatrix} 1 - e^{-\frac{x_1}{\theta_1}} & 1 - e^{-\frac{x_1}{\theta_2}} & \dots & 1 - e^{-\frac{x_1}{\theta_n}} \\ 1 - e^{-\frac{x_1}{\theta_1}} & 1 - e^{-\frac{x_1}{\theta_2}} & \dots & 1 - e^{-\frac{x_1}{\theta_n}} \\ \frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{x_1}{\theta_1}} & \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{x_1}{\theta_2}} & \dots & \frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{x_1}{\theta_n}} \\ \frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{x_2}{\theta_1}} & \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{x_2}{\theta_2}} & \dots & \frac{1}{\theta_4} e^{-\frac{x_2}{\theta_n}} \\ e^{-\frac{x_2}{\theta_1}} & e^{-\frac{x_2}{\theta_2}} & \dots & e^{-\frac{x_2}{\theta_n}} \\ \vdots & & & \\ e^{-\frac{x_2}{\theta_1}} & e^{-\frac{x_2}{\theta_2}} & \dots & e^{-\frac{x_2}{\theta_n}} \end{vmatrix} \begin{matrix} \left. \begin{matrix} \text{---} \end{matrix} \right\} (k_1 - 1) \text{ rows} \\ \leftarrow 1 \text{ row} \\ \leftarrow 1 \text{ row} \\ \left. \begin{matrix} \text{---} \end{matrix} \right\} (n - k_1 - 1) \text{ rows} \end{matrix}$$

(٧-١-٧) دالة كثافة الاحتمال المشتركة لـ p من الإحصاءات الترتيبية من عينة حجمها n :

$$g_{k_1, k_2, \dots, k_p}(x_1, x_2, \dots, x_p) = \frac{1}{(k_1 - 1)!(k_2 - k_1 - 1)!(k_3 - k_2 - 1)! \dots (k_p - k_{p-1} - 1)!(n - k_p)!} \times$$

$F_1(x_1)$	$F_2(x_1)$...	$F_n(x_1)$	} $(k_1 - 1)$ rows
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
$F_1(x_1)$	$F_2(x_1)$...	$F_n(x_1)$	
$f_1(x_1)$	$f_2(x_1)$...	$f_n(x_1)$	← 1 row
$F_1(x_2) - F_1(x_1)$	$F_2(x_2) - F_2(x_1)$...	$F_n(x_2) - F_n(x_1)$	} $(k_2 - k_1 - 1)$ rows
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
$F_1(x_2) - F_1(x_1)$	$F_2(x_2) - F_2(x_1)$...	$F_n(x_2) - F_n(x_1)$	
$f_1(x_2)$	$f_2(x_2)$...	$f_n(x_2)$	← 1 row
$F_1(x_3) - F_1(x_2)$	$F_2(x_3) - F_2(x_2)$...	$F_n(x_3) - F_n(x_2)$	} $(k_3 - k_2 - 1)$ rows
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
$F_1(x_3) - F_1(x_2)$	$F_2(x_3) - F_2(x_2)$...	$F_n(x_3) - F_n(x_2)$	
$f_1(x_3)$	$f_2(x_3)$...	$f_n(x_3)$	← 1 row
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	} $(k_p - k_{p-1} - 1)$ rows
$F_1(x_p) - F_1(x_{p-1})$	$F_2(x_p) - F_2(x_{p-1})$...	$F_n(x_p) - F_n(x_{p-1})$	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
$F_1(x_p) - F_1(x_{p-1})$	$F_2(x_p) - F_2(x_{p-1})$...	$F_n(x_p) - F_n(x_{p-1})$	} $(n - k_p)$ rows
$f_1(x_p)$	$f_2(x_p)$...	$f_n(x_p)$	
$1 - F_1(x_p)$	$1 - F_2(x_p)$...	$1 - F_n(x_p)$	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
$1 - F_1(x_p)$	$1 - F_2(x_p)$...	$1 - F_n(x_p)$	

مثال (٧-١-٤):

إذا كانت المتغيرات المستقلة تتبع توزيع وايل على الشكل التالي:

$$f_i(x) = \alpha_i \beta x^{\beta-1} e^{-\alpha_i x^\beta}, \quad x \geq 0, \alpha_i, \beta > 0,$$

ودوال توزيع تجميعيه

$$F_i(x) = 1 - e^{-\alpha_i x^\beta}, \quad x \geq 0, \alpha_i, \beta > 0,$$

فإن دالة الكثافة الاحتمالية للإحصاء الترتيبى من الرتبة r (Y_r) تأخذ الشكل التالي:

$$g_r(x) = \frac{1}{(r-1)!(n-r)!} \begin{vmatrix} + & 1-e^{-\alpha_1 x^\beta} & 1-e^{-\alpha_2 x^\beta} & \dots & 1-e^{-\alpha_n x^\beta} \\ & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & 1-e^{-\alpha_1 x^\beta} & 1-e^{-\alpha_2 x^\beta} & \dots & 1-e^{-\alpha_n x^\beta} \\ & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & \alpha_1 \beta x^{\beta-1} e^{-\alpha_1 x^\beta} & \alpha_2 \beta x^{\beta-1} e^{-\alpha_2 x^\beta} & \dots & \alpha_n \beta x^{\beta-1} e^{-\alpha_n x^\beta} \\ & e^{-\alpha_1 x^\beta} & e^{-\alpha_2 x^\beta} & \dots & e^{-\alpha_n x^\beta} \\ & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & e^{-\alpha_1 x^\beta} & e^{-\alpha_2 x^\beta} & \dots & e^{-\alpha_n x^\beta} \end{vmatrix} \begin{matrix} \left. \begin{matrix} (r-1) \text{ rows} \end{matrix} \right\} \\ \leftarrow 1 \text{ row} \\ \left. \begin{matrix} (n-r) \text{ rows} \end{matrix} \right\} \end{matrix}$$

ودالة كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبى Y_1 عندما $n = 4$ هي:

$$g_1(x) = \frac{1}{3!} \times$$

$$+ \begin{vmatrix} \alpha_1 \beta x^{\beta-1} e^{-\alpha_1 x^\beta} & \alpha_2 \beta x^{\beta-1} e^{-\alpha_2 x^\beta} & \alpha_3 \beta x^{\beta-1} e^{-\alpha_3 x^\beta} & \alpha_4 \beta x^{\beta-1} e^{-\alpha_4 x^\beta} \\ e^{-\alpha_1 x^\beta} & e^{-\alpha_2 x^\beta} & e^{-\alpha_3 x^\beta} & e^{-\alpha_4 x^\beta} \\ e^{-\alpha_1 x^\beta} & e^{-\alpha_2 x^\beta} & e^{-\alpha_3 x^\beta} & e^{-\alpha_4 x^\beta} \\ e^{-\alpha_1 x^\beta} & e^{-\alpha_2 x^\beta} & e^{-\alpha_3 x^\beta} & e^{-\alpha_4 x^\beta} \end{vmatrix} +$$

ودالة كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبى Y_2 عندما $n = 4$ هي:

$$g_2(x) = \frac{1}{2!} \times$$

$$+ \begin{vmatrix} \{1-e^{-\alpha_1 x^\beta}\} & \{1-e^{-\alpha_2 x^\beta}\} & \{1-e^{-\alpha_3 x^\beta}\} & \{1-e^{-\alpha_4 x^\beta}\} \\ \alpha_1 \beta x^{\beta-1} e^{-\alpha_1 x^\beta} & \alpha_2 \beta x^{\beta-1} e^{-\alpha_2 x^\beta} & \alpha_3 \beta x^{\beta-1} e^{-\alpha_3 x^\beta} & \alpha_4 \beta x^{\beta-1} e^{-\alpha_4 x^\beta} \\ e^{-\alpha_1 x^\beta} & e^{-\alpha_2 x^\beta} & e^{-\alpha_3 x^\beta} & e^{-\alpha_4 x^\beta} \\ e^{-\alpha_1 x^\beta} & e^{-\alpha_2 x^\beta} & e^{-\alpha_3 x^\beta} & e^{-\alpha_4 x^\beta} \end{vmatrix} +$$

ودالة كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبى Y_3 عندما $n = 4$ هي:

$$g_3(x) = \frac{1}{2!}$$

$$^+ \left| \begin{array}{cccc} \{1 - e^{-\alpha_1 x^\beta}\} & \{1 - e^{-\alpha_2 x^\beta}\} & \{1 - e^{-\alpha_3 x^\beta}\} & \{1 - e^{-\alpha_4 x^\beta}\} \\ \{1 - e^{-\alpha_1 x^\beta}\} & \{1 - e^{-\alpha_2 x^\beta}\} & \{1 - e^{-\alpha_3 x^\beta}\} & \{1 - e^{-\alpha_4 x^\beta}\} \\ \alpha_1 \beta x^{\beta-1} e^{-\alpha_1 x^\beta} & \alpha_2 \beta x^{\beta-1} e^{-\alpha_2 x^\beta} & \alpha_3 \beta x^{\beta-1} e^{-\alpha_3 x^\beta} & \alpha_4 \beta x^{\beta-1} e^{-\alpha_4 x^\beta} \\ e^{-\alpha_1 x^\beta} & e^{-\alpha_2 x^\beta} & e^{-\alpha_3 x^\beta} & e^{-\alpha_4 x^\beta} \end{array} \right|^+$$

ودالة كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبى Y_4 عندما $n = 4$ هي:

$$g_4(x) = \frac{1}{3!}$$

$$^+ \left| \begin{array}{cccc} \{1 - e^{-\alpha_1 x^\beta}\} & \{1 - e^{-\alpha_2 x^\beta}\} & \{1 - e^{-\alpha_3 x^\beta}\} & \{1 - e^{-\alpha_4 x^\beta}\} \\ \{1 - e^{-\alpha_1 x^\beta}\} & \{1 - e^{-\alpha_2 x^\beta}\} & \{1 - e^{-\alpha_3 x^\beta}\} & \{1 - e^{-\alpha_4 x^\beta}\} \\ \{1 - e^{-\alpha_1 x^\beta}\} & \{1 - e^{-\alpha_2 x^\beta}\} & \{1 - e^{-\alpha_3 x^\beta}\} & \{1 - e^{-\alpha_4 x^\beta}\} \\ \alpha_1 \beta x^{\beta-1} e^{-\alpha_1 x^\beta} & \alpha_2 \beta x^{\beta-1} e^{-\alpha_2 x^\beta} & \alpha_3 \beta x^{\beta-1} e^{-\alpha_3 x^\beta} & \alpha_4 \beta x^{\beta-1} e^{-\alpha_4 x^\beta} \end{array} \right|^+$$

ودالة كثافة الاحتمال للإحصاءين ترتيبيين Y_{k_1}, Y_{k_2} هي:

$$g_{k_1, k_2}(x_1, x_2) = [(k_1 - 1)!(k_2 - k_1 - 1)!(n - k_2)!]^{-1} \times$$

$$\begin{array}{c}
 \left. \begin{array}{cccc}
 1 - e^{-\alpha_1 x_1^\beta} & 1 - e^{-\alpha_2 x_1^\beta} & \dots & 1 - e^{-\alpha_n x_1^\beta} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 1 - e^{-\alpha_1 x_1^\beta} & 1 - e^{-\alpha_2 x_1^\beta} & \dots & 1 - e^{-\alpha_n x_1^\beta} \\
 \alpha_1 \beta x_1^{\beta-1} e^{-\alpha_1 x_1^\beta} & \alpha_2 \beta x_1^{\beta-1} e^{-\alpha_2 x_1^\beta} & \dots & \alpha_n \beta x_1^{\beta-1} e^{-\alpha_n x_1^\beta} \\
 e^{-\alpha_1 x_2^\beta} - e^{-\alpha_1 x_1^\beta} & e^{-\alpha_2 x_2^\beta} - e^{-\alpha_2 x_1^\beta} & \dots & e^{-\alpha_n x_2^\beta} - e^{-\alpha_n x_1^\beta} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 e^{-\alpha_1 x_2^\beta} - e^{-\alpha_1 x_1^\beta} & e^{-\alpha_2 x_2^\beta} - e^{-\alpha_2 x_1^\beta} & \dots & e^{-\alpha_n x_2^\beta} - e^{-\alpha_n x_1^\beta} \\
 \alpha_1 \beta x_2^{\beta-1} e^{-\alpha_1 x_2^\beta} & \alpha_2 \beta x_2^{\beta-1} e^{-\alpha_2 x_2^\beta} & \dots & \alpha_n \beta x_2^{\beta-1} e^{-\alpha_n x_2^\beta} \\
 e^{-\alpha_1 x_2^\beta} & e^{-\alpha_2 x_2^\beta} & \dots & e^{-\alpha_n x_2^\beta} \\
 \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
 e^{-\alpha_1 x_2^\beta} & e^{-\alpha_2 x_2^\beta} & \dots & e^{-\alpha_n x_2^\beta}
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 (k_1 - 1) \text{ rows} \\
 \leftarrow 1 \text{ row} \\
 (k_2 - k_1 - 1) \text{ rows} \\
 \leftarrow 1 \text{ row} \\
 (n - k_2) \text{ rows}
 \end{array}
 \end{array}$$

ودالة كثافة الاحتمال لاهصاءيين ترتيبيين متاليين Y_{k_1+1}, Y_{k_1} هي:

$$g_{k_1, k_1+1}(x_1, x_2) = [(k_1 - 1)!(n - k_1 - 1)!]^{-1} \times$$

$$\begin{array}{c}
 \left. \begin{array}{cccc}
 1 - e^{-\alpha_1 x_1^\beta} & 1 - e^{-\alpha_2 x_1^\beta} & \dots & 1 - e^{-\alpha_n x_1^\beta} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 1 - e^{-\alpha_1 x_1^\beta} & 1 - e^{-\alpha_2 x_1^\beta} & \dots & 1 - e^{-\alpha_n x_1^\beta} \\
 \alpha_1 \beta x_1^{\beta-1} e^{-\alpha_1 x_1^\beta} & \alpha_2 \beta x_1^{\beta-1} e^{-\alpha_2 x_1^\beta} & \dots & \alpha_n \beta x_1^{\beta-1} e^{-\alpha_n x_1^\beta} \\
 \alpha_1 \beta x_2^{\beta-1} e^{-\alpha_1 x_2^\beta} & \alpha_2 \beta x_2^{\beta-1} e^{-\alpha_2 x_2^\beta} & \dots & \alpha_n \beta x_2^{\beta-1} e^{-\alpha_n x_2^\beta} \\
 e^{-\alpha_1 x_2^\beta} & e^{-\alpha_2 x_2^\beta} & \dots & e^{-\alpha_n x_2^\beta} \\
 \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
 e^{-\alpha_1 x_2^\beta} & e^{-\alpha_2 x_2^\beta} & \dots & e^{-\alpha_n x_2^\beta}
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 (k_1 - 1) \text{ rows} \\
 \leftarrow 1 \text{ row} \\
 \leftarrow 1 \text{ row} \\
 (n - k_1 - 1) \text{ rows}
 \end{array}
 \end{array}$$

ودالة كثافة الاحتمال المشتركة للاحصاءيين الترتيبين Y_n, Y_1 هي:

$$g_{1,n}(x_1, x_2) = [(n-2)!]^{-1} \times$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 \beta x_1^{\beta-1} e^{-\alpha_1 x_1^\beta} & \alpha_2 \beta x_1^{\beta-1} e^{-\alpha_2 x_1^\beta} & \dots & \alpha_n \beta x_1^{\beta-1} e^{-\alpha_n x_1^\beta} \\ e^{-\alpha_1 x_2^\beta} - e^{-\alpha_1 x_1^\beta} & e^{-\alpha_2 x_2^\beta} - e^{-\alpha_2 x_1^\beta} & \dots & e^{-\alpha_n x_2^\beta} - e^{-\alpha_n x_1^\beta} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{-\alpha_1 x_2^\beta} - e^{-\alpha_1 x_1^\beta} & e^{-\alpha_2 x_2^\beta} - e^{-\alpha_2 x_1^\beta} & \dots & e^{-\alpha_n x_2^\beta} - e^{-\alpha_n x_1^\beta} \\ \alpha_1 \beta x_2^{\beta-1} e^{-\alpha_1 x_2^\beta} & \alpha_2 \beta x_2^{\beta-1} e^{-\alpha_2 x_2^\beta} & \dots & \alpha_n \beta x_2^{\beta-1} e^{-\alpha_n x_2^\beta} \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1 \text{ row} \\ \left. \vphantom{\begin{vmatrix} \end{vmatrix}} \right\} (n-2) \text{ rows} \\ \leftarrow 1 \text{ row} \end{matrix}$$

ودالة كثافة الاحتمال المشتركة للاحصاءيين الترتيبين Y_2, Y_1 و $n=4$ هي:

$$g_{1,2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2!} \times$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 \beta x_1^{\beta-1} e^{-\alpha_1 x_1^\beta} & \alpha_2 \beta x_1^{\beta-1} e^{-\alpha_2 x_1^\beta} & \alpha_3 \beta x_1^{\beta-1} e^{-\alpha_3 x_1^\beta} & \alpha_4 \beta x_1^{\beta-1} e^{-\alpha_4 x_1^\beta} \\ \alpha_1 \beta x_2^{\beta-1} e^{-\alpha_1 x_2^\beta} & \alpha_2 \beta x_2^{\beta-1} e^{-\alpha_2 x_2^\beta} & \alpha_3 \beta x_2^{\beta-1} e^{-\alpha_3 x_2^\beta} & \alpha_4 \beta x_2^{\beta-1} e^{-\alpha_4 x_2^\beta} \\ e^{-\alpha_1 x_2^\beta} & e^{-\alpha_2 x_2^\beta} & e^{-\alpha_3 x_2^\beta} & e^{-\alpha_4 x_2^\beta} \\ e^{-\alpha_1 x_2^\beta} & e^{-\alpha_2 x_2^\beta} & e^{-\alpha_3 x_2^\beta} & e^{-\alpha_4 x_2^\beta} \end{vmatrix}$$

دالة كثافة الاحتمال المشتركة للاحصاءيين الترتيبين Y_1, Y_4 و $n=4$ هي:

$$g_{1,4}(x_1, x_2) = [2!]^{-1} \times$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 \beta x_1^{\beta-1} e^{-\alpha_1 x_1^\beta} & \alpha_2 \beta x_1^{\beta-1} e^{-\alpha_2 x_1^\beta} & \alpha_3 \beta x_1^{\beta-1} e^{-\alpha_3 x_1^\beta} & \alpha_4 \beta x_1^{\beta-1} e^{-\alpha_4 x_1^\beta} \\ e^{-\alpha_1 x_2^\beta} - e^{-\alpha_1 x_1^\beta} & e^{-\alpha_2 x_2^\beta} - e^{-\alpha_2 x_1^\beta} & e^{-\alpha_3 x_2^\beta} - e^{-\alpha_3 x_1^\beta} & e^{-\alpha_4 x_2^\beta} - e^{-\alpha_4 x_1^\beta} \\ e^{-\alpha_1 x_2^\beta} - e^{-\alpha_1 x_1^\beta} & e^{-\alpha_2 x_2^\beta} - e^{-\alpha_2 x_1^\beta} & e^{-\alpha_3 x_2^\beta} - e^{-\alpha_3 x_1^\beta} & e^{-\alpha_4 x_2^\beta} - e^{-\alpha_4 x_1^\beta} \\ \alpha_1 \beta x_2^{\beta-1} e^{-\alpha_1 x_2^\beta} & \alpha_2 \beta x_2^{\beta-1} e^{-\alpha_2 x_2^\beta} & \alpha_3 \beta x_2^{\beta-1} e^{-\alpha_3 x_2^\beta} & \alpha_4 \beta x_2^{\beta-1} e^{-\alpha_4 x_2^\beta} \end{vmatrix}$$

مثال (٧-١-٥):

إذا كانت دالة كثافة الاحتمال لتوزيع باريتو هي:

$$f_i(x) = v_i e^{-(v_i+1)x}, \quad x \geq 1, \quad v_i > 0.$$

ودالة التوزيع التجميعي على الشكل:

$$F_i(x) = 1 - x^{-v_i}, \quad x \geq 1, \quad v_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

فإن دالة كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبي من الرتبة r (Y_r) هي:

$$g_r(x) = \frac{1}{(r-1)!(n-r)!} \times \begin{vmatrix} \left\{ 1 - x^{-v_1} \right\} & \left\{ 1 - x^{-v_2} \right\} & \dots & \left\{ 1 - x^{-v_n} \right\} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \left\{ 1 - x^{-v_1} \right\} & \left\{ 1 - x^{-v_2} \right\} & \dots & \left\{ 1 - x^{-v_n} \right\} \\ v_1 x^{-(v_1+1)} & v_2 x^{-(v_2+1)} & \dots & v_n x^{-(v_n+1)} \\ x^{-v_1} & x^{-v_2} & \dots & x^{-v_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x^{-v_1} & x^{-v_2} & \dots & x^{-v_n} \end{vmatrix}^+ \begin{matrix} \left. \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} \right\} r-1 \text{ rows} \\ \leftarrow 1 \text{ row} \\ \left. \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} \right\} n-r \text{ rows} \end{matrix}$$

عندما $n=4$, $r=1$ فإن دالة كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبي Y_1 هي:

$$g_1(x) = \frac{1}{3!} \times \begin{vmatrix} v_1 x^{-(v_1+1)} & v_2 x^{-(v_2+1)} & v_3 x^{-(v_3+1)} & v_4 x^{-(v_4+1)} \\ x^{-v_1} & x^{-v_2} & x^{-v_3} & x^{-v_4} \\ x^{-v_1} & x^{-v_2} & x^{-v_3} & x^{-v_4} \\ x^{-v_1} & x^{-v_2} & x^{-v_3} & x^{-v_4} \end{vmatrix}^+$$

ودالة كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبي Y_2 عندما $n=4$ هي:

$$g_2(x) = \frac{1}{2!} \times \begin{vmatrix} \left\{ 1 - x^{-v_1} \right\} & \left\{ 1 - x^{-v_2} \right\} & \left\{ 1 - x^{-v_3} \right\} & \left\{ 1 - x^{-v_4} \right\} \\ v_1 x^{-(v_1+1)} & v_2 x^{-(v_2+1)} & v_3 x^{-(v_3+1)} & v_4 x^{-(v_4+1)} \\ x^{-v_1} & x^{-v_2} & x^{-v_3} & x^{-v_4} \\ x^{-v_1} & x^{-v_2} & x^{-v_3} & x^{-v_4} \end{vmatrix}^+$$

مثال (٦-١-٧):

لتكن المتغيرات X_1, X_2, \dots, X_n تتبع توزيع إيرلنج Erlang Distribution بدوال كثافة احتمالية

$$f_i(x) = \frac{\lambda_i^m}{\Gamma(m)} x^{m-1} e^{-\lambda_i x}, \quad x \geq 0, \lambda_i \geq 0,$$

ودوال توزيع تجميعية:

$$F_i(x) = 1 - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_i x)^t}{t!} e^{-\lambda_i x}, \quad x \geq 0, \lambda_i \geq 0,$$

فإن دالة كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبي من الرتبة (Y_r) هي:

$$g_r(x) = \frac{1}{(r-1)!(n-r)!} \times$$

$$\begin{vmatrix} \left(1 - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_1 x)^t}{t!} e^{-\lambda_1 x}\right) & \left(1 - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_2 x)^t}{t!} e^{-\lambda_2 x}\right) & \dots & \left(1 - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_n x)^t}{t!} e^{-\lambda_n x}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(1 - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_1 x)^t}{t!} e^{-\lambda_1 x}\right) & \left(1 - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_2 x)^t}{t!} e^{-\lambda_2 x}\right) & \dots & \left(1 - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_n x)^t}{t!} e^{-\lambda_n x}\right) \\ \frac{\lambda_1^m}{\Gamma(m)} x^{m-1} e^{-\lambda_1 x} & \frac{\lambda_2^m}{\Gamma(m)} x^{m-1} e^{-\lambda_2 x} & \dots & \frac{\lambda_n^m}{\Gamma(m)} x^{m-1} e^{-\lambda_n x} \\ \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_1 x)^t}{t!} e^{-\lambda_1 x} & \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_2 x)^t}{t!} e^{-\lambda_2 x} & \dots & \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_n x)^t}{t!} e^{-\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_1 x)^t}{t!} e^{-\lambda_1 x} & \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_2 x)^t}{t!} e^{-\lambda_2 x} & \dots & \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_n x)^t}{t!} e^{-\lambda_n x} \end{vmatrix}^+$$

ودالة كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبي Y_1 عندما $n=3$ هي:

$$g_1(x) = \frac{1}{2!} \times \begin{vmatrix} \frac{\lambda_1^m}{\Gamma(m)} x^{m-1} e^{-\lambda_1 x} & \frac{\lambda_2^m}{\Gamma(m)} x^{m-1} e^{-\lambda_2 x} & \frac{\lambda_3^m}{\Gamma(m)} x^{m-1} e^{-\lambda_3 x} \\ \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_1 x)^t}{t!} e^{-\lambda_1 x} & \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_2 x)^t}{t!} e^{-\lambda_2 x} & \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_3 x)^t}{t!} e^{-\lambda_3 x} \\ \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_1 x)^t}{t!} e^{-\lambda_1 x} & \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_2 x)^t}{t!} e^{-\lambda_2 x} & \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_3 x)^t}{t!} e^{-\lambda_3 x} \end{vmatrix}^+$$

ودالة كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبى Y_2 هي:

$$g_2(x) = \begin{vmatrix} \left(1 - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_1 x)^t}{t!} e^{-\lambda_1 x}\right) & \left(\sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_2 x)^t}{t!} e^{-\lambda_2 x}\right) & \left(\sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_3 x)^t}{t!} e^{-\lambda_3 x}\right) \\ \frac{\lambda_1^m}{\Gamma(m)} x^{m-1} e^{-\lambda_1 x} & \frac{\lambda_2^m}{\Gamma(m)} x^{m-1} e^{-\lambda_2 x} & \frac{\lambda_3^m}{\Gamma(m)} x^{m-1} e^{-\lambda_3 x} \\ \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_1 x)^t}{t!} e^{-\lambda_1 x} & \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_2 x)^t}{t!} e^{-\lambda_2 x} & \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_3 x)^t}{t!} e^{-\lambda_3 x} \end{vmatrix}^+$$

ودالة كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبى Y_3 هي و $n=3$:

$$g_3(x) = \frac{1}{2!} \times \begin{vmatrix} \left(1 - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(\lambda_1 x)^t}{t!} e^{-\lambda_1 x}\right) & \left(1 - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(\lambda_2 x)^t}{t!} e^{-\lambda_2 x}\right) & \left(1 - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_3 x)^t}{t!} e^{-\lambda_3 x}\right) \\ \left(1 - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_1 x)^t}{t!} e^{-\lambda_1 x}\right) & \left(1 - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_2 x)^t}{t!} e^{-\lambda_2 x}\right) & \left(1 - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_3 x)^t}{t!} e^{-\lambda_3 x}\right) \\ \frac{\lambda_1^m}{\Gamma(m)} x^{m-1} e^{-\lambda_1 x} & \frac{\lambda_2^m}{\Gamma(m)} x^{m-1} e^{-\lambda_2 x} & \frac{\lambda_3^m}{\Gamma(m)} x^{m-1} e^{-\lambda_3 x} \end{vmatrix}^+$$

ودالة كثافة الاحتمال للإحصائيين الترتيبين Y_{k_2}, Y_{k_1} هي:

$$g_{k_1, k_2}(x_1, x_2) = \left[(k_1 - 1)! (k_2 - k_1 - 1)! (n - k_2)! \right]^{-1} \times$$

$$\begin{array}{c} \left\{ 1 - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_1 x_1)^t}{t!} e^{-\lambda_1 x_1} \right\} \quad \left\{ 1 - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_2 x_1)^t}{t!} e^{-\lambda_2 x_1} \right\} \quad \dots \quad \left\{ 1 - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_n x_1)^t}{t!} e^{-\lambda_n x_1} \right\} \\ \left\{ 1 - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_1 x_1)^t}{t!} e^{-\lambda_1 x_1} \right\} \quad \left\{ 1 - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_2 x_1)^t}{t!} e^{-\lambda_2 x_1} \right\} \quad \dots \quad \left\{ 1 - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_n x_1)^t}{t!} e^{-\lambda_n x_1} \right\} \\ \frac{\lambda_1^m}{\Gamma(m)} x_1^{m-1} e^{-\lambda_1 x_1} \quad \frac{\lambda_2^m}{\Gamma(m)} x_1^{m-1} e^{-\lambda_2 x_1} \quad \dots \quad \frac{\lambda_n^m}{\Gamma(m)} x_1^{m-1} e^{-\lambda_n x_1} \\ \left\{ \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_1 x_2)^t}{t!} e^{-\lambda_1 x_2} - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_1 x_1)^t}{t!} e^{-\lambda_1 x_1} \right\} \quad \left\{ \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_2 x_2)^t}{t!} e^{-\lambda_2 x_2} - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_2 x_1)^t}{t!} e^{-\lambda_2 x_1} \right\} \quad \dots \quad \left\{ \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_n x_2)^t}{t!} e^{-\lambda_n x_2} - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_n x_1)^t}{t!} e^{-\lambda_n x_1} \right\} \\ \left\{ \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_1 x_2)^t}{t!} e^{-\lambda_1 x_2} - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_1 x_1)^t}{t!} e^{-\lambda_1 x_1} \right\} \quad \left\{ \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_2 x_2)^t}{t!} e^{-\lambda_2 x_2} - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_2 x_1)^t}{t!} e^{-\lambda_2 x_1} \right\} \quad \dots \quad \left\{ \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_n x_2)^t}{t!} e^{-\lambda_n x_2} - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_n x_1)^t}{t!} e^{-\lambda_n x_1} \right\} \\ \frac{\lambda_1^m}{\Gamma(m)} x_1^{m-1} e^{-\lambda_1 x_1} \quad \frac{\lambda_2^m}{\Gamma(m)} x_1^{m-1} e^{-\lambda_2 x_1} \quad \dots \quad \frac{\lambda_n^m}{\Gamma(m)} x_1^{m-1} e^{-\lambda_n x_1} \\ \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_1 x_2)^t}{t!} e^{-\lambda_1 x_2} \quad \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_2 x_2)^t}{t!} e^{-\lambda_2 x_2} \quad \dots \quad \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_n x_2)^t}{t!} e^{-\lambda_n x_2} \\ \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_1 x_2)^t}{t!} e^{-\lambda_1 x_2} \quad \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_2 x_2)^t}{t!} e^{-\lambda_2 x_2} \quad \dots \quad \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_n x_2)^t}{t!} e^{-\lambda_n x_2} \end{array}$$

ودالة كثافة الاحتمال لاحصاءين ترتيبين متالين:

$$g_{k_1, k_2+1}(X_1, X_2) = \left[(k_1 - 1)! (n - k_1 - 1)! \right]^{-1} \times$$

$$\begin{array}{c} \left\{ 1 - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_1 x_1)^t}{t!} e^{-\lambda_1 x_1} \right\} \quad \left\{ 1 - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_2 x_1)^t}{t!} e^{-\lambda_2 x_1} \right\} \quad \dots \quad \left\{ 1 - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_n x_1)^t}{t!} e^{-\lambda_n x_1} \right\} \\ \left\{ 1 - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_1 x_1)^t}{t!} e^{-\lambda_1 x_1} \right\} \quad \left\{ 1 - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_2 x_1)^t}{t!} e^{-\lambda_2 x_1} \right\} \quad \dots \quad \left\{ 1 - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_n x_1)^t}{t!} e^{-\lambda_n x_1} \right\} \\ \frac{\lambda_1^m}{\Gamma(m)} x_1^{m-1} e^{-\lambda_1 x_1} \quad \frac{\lambda_2^m}{\Gamma(m)} x_1^{m-1} e^{-\lambda_2 x_1} \quad \dots \quad \frac{\lambda_n^m}{\Gamma(m)} x_1^{m-1} e^{-\lambda_n x_1} \\ \frac{\lambda_1^m}{\Gamma(m)} x_2^{m-1} e^{-\lambda_1 x_2} \quad \frac{\lambda_2^m}{\Gamma(m)} x_2^{m-1} e^{-\lambda_2 x_2} \quad \dots \quad \frac{\lambda_n^m}{\Gamma(m)} x_2^{m-1} e^{-\lambda_n x_2} \\ \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_1 x_2)^t}{t!} e^{-\lambda_1 x_2} \quad \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_2 x_2)^t}{t!} e^{-\lambda_2 x_2} \quad \dots \quad \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_n x_2)^t}{t!} e^{-\lambda_n x_2} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_1 x_2)^t}{t!} e^{-\lambda_1 x_2} \quad \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_2 x_2)^t}{t!} e^{-\lambda_2 x_2} \quad \dots \quad \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_n x_2)^t}{t!} e^{-\lambda_n x_2} \end{array} \begin{array}{l} (k_1 - 1) \text{ rows} \\ \leftarrow 1 \text{ row} \\ \leftarrow 1 \text{ row} \\ (n - k_1 - 1) \text{ rows} \end{array}$$

ودالة كثافة الاحتمال للإحصاءين الترتيبين الاول والاخير (Y_1, Y_n) هي:

$$g_{1,2}(x_1, x_2) = [(n-2)!]^{-1} \times$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\lambda_1^m}{\Gamma(m)} x_1^{m-1} e^{-\lambda_1 x_1} & \frac{\lambda_2^m}{\Gamma(m)} x_1^{m-1} e^{-\lambda_2 x_1} & \dots & \frac{\lambda_n^m}{\Gamma(m)} x_1^{m-1} e^{-\lambda_n x_1} \\ \left\{ \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_1 x_2)^t}{t!} e^{-\lambda_1 x_2} - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_1 x_1)^t}{t!} e^{-\lambda_1 x_1} \right\} & \left\{ \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_2 x_2)^t}{t!} e^{-\lambda_2 x_2} - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_2 x_1)^t}{t!} e^{-\lambda_2 x_1} \right\} & \dots & \left\{ \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_n x_2)^t}{t!} e^{-\lambda_n x_2} - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_n x_1)^t}{t!} e^{-\lambda_n x_1} \right\} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \left\{ \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_1 x_2)^t}{t!} e^{-\lambda_1 x_2} - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_1 x_1)^t}{t!} e^{-\lambda_1 x_1} \right\} & \left\{ \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_2 x_2)^t}{t!} e^{-\lambda_2 x_2} - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_2 x_1)^t}{t!} e^{-\lambda_2 x_1} \right\} & \dots & \left\{ \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_n x_2)^t}{t!} e^{-\lambda_n x_2} - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_n x_1)^t}{t!} e^{-\lambda_n x_1} \right\} \\ \frac{\lambda_1^m}{\Gamma(m)} x_2^{m-1} e^{-\lambda_1 x_2} & \frac{\lambda_2^m}{\Gamma(m)} x_2^{m-1} e^{-\lambda_2 x_2} & \dots & \frac{\lambda_n^m}{\Gamma(m)} x_2^{m-1} e^{-\lambda_n x_2} \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1 \text{ row} \\ (n-2) \text{ rows} \\ \leftarrow 1 \text{ row} \end{matrix}$$

ودالة كثافة الاحتمال للإحصاءين الترتيبين (Y_2, Y_1) عند $n=4$ هي:

$$g_{1,2}(x_1, x_2) = [2!]^{-1}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\lambda_1^m}{\Gamma(m)} x_1^{m-1} e^{-\lambda_1 x_1} & \frac{\lambda_2^m}{\Gamma(m)} x_1^{m-1} e^{-\lambda_2 x_1} & \frac{\lambda_3^m}{\Gamma(m)} x_1^{m-1} e^{-\lambda_3 x_1} & \frac{\lambda_4^m}{\Gamma(m)} x_1^{m-1} e^{-\lambda_4 x_1} \\ \frac{\lambda_1^m}{\Gamma(m)} x_2^{m-1} e^{-\lambda_1 x_2} & \frac{\lambda_2^m}{\Gamma(m)} x_2^{m-1} e^{-\lambda_2 x_2} & \frac{\lambda_3^m}{\Gamma(m)} x_2^{m-1} e^{-\lambda_3 x_2} & \frac{\lambda_4^m}{\Gamma(m)} x_2^{m-1} e^{-\lambda_4 x_2} \\ \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_1 x_2)^t}{t!} e^{-\lambda_1 x_2} & \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_2 x_2)^t}{t!} e^{-\lambda_2 x_2} & \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_3 x_2)^t}{t!} e^{-\lambda_3 x_2} & \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_4 x_2)^t}{t!} e^{-\lambda_4 x_2} \\ \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_1 x_2)^t}{t!} e^{-\lambda_1 x_2} & \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_2 x_2)^t}{t!} e^{-\lambda_2 x_2} & \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_3 x_2)^t}{t!} e^{-\lambda_3 x_2} & \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_4 x_2)^t}{t!} e^{-\lambda_4 x_2} \end{vmatrix}$$

(٧-١-٨) دالة التوزيع التجميعية للإحصاء الترتيبى من الرتبة (Y_r) :

$$F_{r:n}(x) = \sum_{i=r}^n \frac{1}{i!(n-i)!} \begin{vmatrix} F_1(x) & 1-F_1(x) \\ \vdots & \vdots \\ F_n(x) & 1-F_n(x) \end{vmatrix} \begin{matrix} i \\ n-i \end{matrix}, \quad -\infty < x < \infty.$$

وعلى ذلك دالة التوزيع التجميعية للإحصاء الترتيبي من الرتبة الأولى (Y_1) هي:

$$F_{1:n}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!(n-i)!} \begin{vmatrix} F_1(x) & 1-F_n(x) \\ \vdots & \vdots \\ \underbrace{F_1(x)}_i & \underbrace{1-F_n(x)}_{n-i} \end{vmatrix}^+, \quad -\infty < x < \infty.$$

وبالتالي تكون دالة التوزيع التجميعي للإحصاء الترتيبي من الرتبة n (Y_n) هي:

$$F_{n:n}(x) = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} F_1(x) \\ \vdots \\ \underbrace{F_n(x)}_n \end{vmatrix}^+, \quad -\infty < x < \infty$$

(أ) تحت فرض التوزيع الأسّي:

دالة التوزيع التجميعي للإحصاء الترتيبي من الرتبة الأولى (Y_1) عندما $n=3$ هي:

$$\begin{aligned} F_{13}(x) &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{i!(3-i)!} \begin{vmatrix} 1-e^{-\frac{x}{\theta_1}} & e^{-\frac{x}{\theta_1}} \\ \vdots & \vdots \\ \underbrace{1-e^{-\frac{x}{\theta_3}}}_i & \underbrace{e^{-\frac{x}{\theta_3}}}_{3-i} \end{vmatrix}^+ \\ &= \frac{1}{2!} \begin{vmatrix} 1-e^{-\frac{x}{\theta_1}} & e^{-\frac{x}{\theta_1}} \\ \vdots & \vdots \\ \underbrace{1-e^{-\frac{x}{\theta_3}}}_1 & \underbrace{e^{-\frac{x}{\theta_3}}}_2 \end{vmatrix}^+ + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1-e^{-\frac{x}{\theta_1}} & e^{-\frac{x}{\theta_1}} \\ \vdots & \vdots \\ \underbrace{1-e^{-\frac{x}{\theta_3}}}_2 & \underbrace{e^{-\frac{x}{\theta_3}}}_1 \end{vmatrix}^+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} 1 - e^{-\frac{x}{\theta_1}} & e^{-\frac{x}{\theta_1}} \\ \vdots & \vdots \\ \underbrace{1 - e^{-\frac{x}{\theta_3}}}_3 & \underbrace{e^{-\frac{x}{\theta_3}}}_0 \end{vmatrix} \\
 & = \frac{1}{2!} \begin{vmatrix} 1 - e^{-\frac{x}{\theta_1}} & e^{-\frac{x}{\theta_1}} & e^{-\frac{x}{\theta_1}} \\ 1 - e^{-\frac{x}{\theta_2}} & e^{-\frac{x}{\theta_2}} & e^{-\frac{x}{\theta_2}} \\ 1 - e^{-\frac{x}{\theta_3}} & e^{-\frac{x}{\theta_3}} & e^{-\frac{x}{\theta_3}} \end{vmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{vmatrix} 1 - e^{-\frac{x}{\theta_1}} & 1 - e^{-\frac{x}{\theta_1}} & e^{-\frac{x}{\theta_1}} \\ 1 - e^{-\frac{x}{\theta_2}} & 1 - e^{-\frac{x}{\theta_2}} & e^{-\frac{x}{\theta_2}} \\ 1 - e^{-\frac{x}{\theta_3}} & 1 - e^{-\frac{x}{\theta_3}} & e^{-\frac{x}{\theta_3}} \end{vmatrix} \\
 & + \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} 1 - e^{-\frac{x}{\theta_1}} & 1 - e^{-\frac{x}{\theta_1}} & 1 - e^{-\frac{x}{\theta_1}} \\ 1 - e^{-\frac{x}{\theta_2}} & 1 - e^{-\frac{x}{\theta_2}} & 1 - e^{-\frac{x}{\theta_2}} \\ 1 - e^{-\frac{x}{\theta_3}} & 1 - e^{-\frac{x}{\theta_3}} & 1 - e^{-\frac{x}{\theta_3}} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

ودالة التوزيع التجميعي للإحصاء الترتيبي Y_2 عندما $n = 3$ هي:

$$\begin{aligned}
 F_{2,3}(x) &= \sum_{i=2}^3 \frac{1}{i!(3-i)!} \begin{vmatrix} 1 - e^{-\frac{x}{\theta_1}} & e^{-\frac{x}{\theta_1}} \\ \vdots & \vdots \\ \underbrace{1 - e^{-\frac{x}{\theta_3}}}_i & \underbrace{e^{-\frac{x}{\theta_3}}}_{3-i} \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{2!} \begin{vmatrix} 1 - e^{-\frac{x}{\theta_1}} & e^{-\frac{x}{\theta_1}} \\ \vdots & \vdots \\ \underbrace{1 - e^{-\frac{x}{\theta_3}}}_2 & \underbrace{e^{-\frac{x}{\theta_3}}}_1 \end{vmatrix} + \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} 1 - e^{-\frac{x}{\theta_1}} & e^{-\frac{x}{\theta_1}} \\ \vdots & \vdots \\ \underbrace{1 - e^{-\frac{x}{\theta_3}}}_3 & \underbrace{e^{-\frac{x}{\theta_3}}}_0 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2!} \begin{vmatrix} 1-e^{-\frac{x}{\theta_1}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_1}} & e^{-\frac{x}{\theta_1}} \\ 1-e^{-\frac{x}{\theta_2}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_2}} & e^{-\frac{x}{\theta_2}} \\ 1-e^{-\frac{x}{\theta_3}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_3}} & e^{-\frac{x}{\theta_3}} \end{vmatrix} + \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1-e^{-\frac{x}{\theta_1}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_1}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_1}} \\ 1-e^{-\frac{x}{\theta_2}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_2}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_2}} \\ 1-e^{-\frac{x}{\theta_3}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_3}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_3}} \end{vmatrix}$$

ودالة التوزيع التجميعي للإحصاء الترتيبي Y_3 عندما $n = 3$ هي:

$$F_{3:3}(x) = \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} 1-e^{-\frac{x}{\theta_1}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_1}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_1}} \\ 1-e^{-\frac{x}{\theta_2}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_2}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_2}} \\ 1-e^{-\frac{x}{\theta_3}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_3}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_3}} \end{vmatrix}$$

(ب) تحت فرض توزيع وايل

داله التوزيع التجميعي للإحصاء الترتيبي من الرتبة r (Y_r) هي:

$$F_{r:n}(x) = \sum_{i=r}^n \frac{1}{i!(n-i)!} \begin{vmatrix} 1-e^{-\alpha_1 x^\beta} & e^{-\alpha_1 x^\beta} \\ \vdots & \vdots \\ \underbrace{1-e^{-\alpha_n x^\beta}}_i & \underbrace{e^{-\alpha_n x^\beta}}_{n-i} \end{vmatrix}, -\infty < x < \infty.$$

داله التوزيع التجميعي للإحصاء الترتيبي Y_1 عندما $n = 3$ هي:

$$F_{1:3}(x) = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{i!(3-i)!} \begin{vmatrix} 1-e^{-\alpha_1 x^\beta} & e^{-\alpha_1 x^\beta} \\ \vdots & \vdots \\ \underbrace{1-e^{-\alpha_3 x^\beta}}_i & \underbrace{e^{-\alpha_3 x^\beta}}_{3-i} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2!} \begin{vmatrix} 1-e^{-\alpha_1 x^\beta} & e^{-\alpha_1 x^\beta} \\ 1-e^{-\alpha_2 x^\beta} & e^{-\alpha_2 x^\beta} \\ \underbrace{1-e^{-\alpha_3 x^\beta}}_1 & \underbrace{e^{-\alpha_3 x^\beta}}_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{vmatrix} 1-e^{-\alpha_1 x^\beta} & e^{-\alpha_1 x^\beta} \\ 1-e^{-\alpha_2 x^\beta} & e^{-\alpha_2 x^\beta} \\ \underbrace{1-e^{-\alpha_3 x^\beta}}_2 & \underbrace{e^{-\alpha_3 x^\beta}}_1 \end{vmatrix}$$

$$+\frac{1}{3!} \begin{vmatrix} 1-e^{-\alpha_1 x^\beta} & e^{-\alpha_1 x^\beta} \\ 1-e^{-\alpha_2 x^\beta} & e^{-\alpha_2 x^\beta} \\ \underbrace{1-e^{-\alpha_3 x^\beta}}_3 & \underbrace{e^{-\alpha_3 x^\beta}}_0 \end{vmatrix}^+$$

وداله التوزيع التجميعي للاحصاء الترتيبي Y_2 عندما $n=3$ هي:

$$F_{2:3}(x) = \sum_{i=2}^3 \frac{1}{i!(3-i)!} \begin{vmatrix} 1-e^{-\alpha_1 x^\beta} & e^{-\alpha_1 x^\beta} \\ \vdots & \vdots \\ \underbrace{1-e^{-\alpha_3 x^\beta}}_i & \underbrace{e^{-\alpha_3 x^\beta}}_{3-i} \end{vmatrix}^+$$

$$= \frac{1}{2!} \begin{vmatrix} 1-e^{-\alpha_1 x^\beta} & e^{-\alpha_1 x^\beta} \\ 1-e^{-\alpha_2 x^\beta} & e^{-\alpha_2 x^\beta} \\ \underbrace{1-e^{-\alpha_3 x^\beta}}_2 & \underbrace{e^{-\alpha_3 x^\beta}}_1 \end{vmatrix}^+ + \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} 1-e^{-\alpha_1 x^\beta} & e^{-\alpha_1 x^\beta} \\ 1-e^{-\alpha_2 x^\beta} & e^{-\alpha_2 x^\beta} \\ \underbrace{1-e^{-\alpha_3 x^\beta}}_3 & \underbrace{e^{-\alpha_3 x^\beta}}_0 \end{vmatrix}^+$$

وداله التوزيع التجميعي للاحصاء الترتيبي Y_3 و $n=3$ هي:

$$F_{3:3}(x) = \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} 1-e^{-\alpha_1 x^\beta} & 1-e^{-\alpha_1 x^\beta} & 1-e^{-\alpha_1 x^\beta} \\ 1-e^{-\alpha_2 x^\beta} & 1-e^{-\alpha_2 x^\beta} & 1-e^{-\alpha_2 x^\beta} \\ 1-e^{-\alpha_3 x^\beta} & 1-e^{-\alpha_3 x^\beta} & 1-e^{-\alpha_3 x^\beta} \end{vmatrix}^+$$

(ج) تحت فرض توزيع ايرلنج

داله التوزيع التجميعي للاحصاء الترتيبي من الرتبة r (Y_r) هي:

$$F_{r:n}(x) = \sum_{i=r}^n \frac{1}{i!(n-i)!} \begin{vmatrix} 1 - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_1 x)^t}{t!} e^{-\lambda_1 x} & \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_1 x)^t}{t!} e^{-\lambda_1 x} \\ \vdots & \vdots \\ \underbrace{1 - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_n x)^t}{t!} e^{-\lambda_n x}}_i & \underbrace{\sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_n x)^t}{t!} e^{-\lambda_n x}}_{n-i} \end{vmatrix}^+, -\infty < x < \infty$$

وداله التوزيع التجميعي للإحصاء الترتيبي من الرتبة Y_1 و $n=3$ هي:

$$F_{1:3}(x) = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{i!(3-i)!} \left[\underbrace{1 - \sum_{t=0}^1 \frac{(\lambda_1 x)^t}{t!} e^{-\lambda_1 x}}_i \underbrace{\sum_{t=0}^1 \frac{(\lambda_1 x)^t}{t!} e^{-\lambda_1 x}}_{3-i} \right]^+$$

$$\therefore F_{1:3}(x) = \frac{1}{2!} \left[\underbrace{1 - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_1 x)^t}{t!} e^{-\lambda_1 x}}_1 \underbrace{\sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_1 x)^t}{t!} e^{-\lambda_1 x}}_2 \right]^+$$

$$+ \frac{1}{2!} \left[\underbrace{1 - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_2 x)^t}{t!} e^{-\lambda_2 x}}_2 \underbrace{\sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_2 x)^t}{t!} e^{-\lambda_2 x}}_1 \right]^+$$

$$+ \frac{1}{3!} \left[\underbrace{1 - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_3 x)^t}{t!} e^{-\lambda_3 x}}_3 \underbrace{\sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_3 x)^t}{t!} e^{-\lambda_3 x}}_0 \right]^+$$

(٧-٢) عزوم الاحصاءات الترتيبية لمتغيرات عشوائية غير متماثلة التوزيع: Moments of Order Statistics for No identically Distributed Variables

اعتمدت طريقة إيجاد العزوم للاحصاءات الترتيبية لمتغيرات عشوائية غير متماثلة التوزيع على استخدام العلاقات التكرارية. وقد أسس Balakrishnan ، في الاعوام ، (1988a) (1988b) ، (1994a) ، (1994b) ، (1994 c) ، الكثير من العلاقات التكرارية للعزوم المفردة وعزوم حاصل الضرب. ففي الفترة من (1994) الى (2004) اتجهت الابحاث العلمية باتجاهين علميين مختلفين. فالأول يعتمد على إيجاد هذه العزوم على فكره اساسيه ، وهي وجود علاقة خطية بين داله الكثافة الاحتمالية للتوزيع وداله التوزيع التجميعية لبعض التوزيعات حيث طبقها Barakat (1998) Child and Balakrishnan على توزيع باريتو. والاتجاه الثاني اتبعه Barakat and Abdelkader (2000) حيث تم إيجاد العزوم للاحصاءات الترتيبية لتوزيعات غير متماثلة تحت فرض توزيع واييل وعمماها في عام (2004) وتمتاز هذه الطريقة بعموميتها من حيث امكانية تطبيقها على أى توزيع سواء وجدت علاقة خطية بين داله الكثافة الاحتمالية ، ودالة التوزيع التجميعي أم لم توجد. وتعتمد هذه الطريقة على إيجاد العزم للإحصاء الترتيبي من الرتبة r بدلالة العزم k لا كبر الاحصاءات الترتيبية واصغرهما لكل العينات الممكنة المسحوبة من العينة المعطاه.

لتكن X_1, X_2, \dots, X_n متغيرات عشوائية مستقلة بدوال توزيع تجميعي $F_i(x)$ ودوال كثافة احتمالية $f_i(x)$ ، ولتكن $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n$ الاحصاءات الترتيبية ، سوف نرمز للعزم k للاحصاء الترتيبي من الرتبة r والمأخوذ من عينه عشوائية من الحجم n بالرمز:

$$\mu_{r:n}^{(k)} = E(Y_r^k) ,$$

حيث:

$$k \geq 1 , 1 \leq r \leq n$$

وسوف نرمز للعزم الاول بالرمز $\mu_{r:n}^{(1)}$.

وفيما يلي بعض العلاقات التكرارية للحصول على العزوم للاحصاءات الترتيبية تحت فرض التوزيعات التالية:

(٧-٢-١) التوزيع الاسي:

(أ) علاقة تكرارية لعزوم اصغر الاحصاءات الترتيبية وتحت فرض التوزيع الاسي:

$$\text{عندما } k = 0, 1, 2, \dots , n = 1, 2, \dots$$

$$\mu_{1:n}^{(k+1)} = \frac{k+1}{\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\theta_i} \right)} \mu_{1:n}^{(k)} . \quad (٤٠٧)$$

بوضع $k=0$, $k=1$ في (٤٠٧) نحصل على الوسط الحسابي $\mu_{1:n}$ والعزم الثاني حول الصفر $\mu_{1:n}^2$ على التوالي لأصغر الإحصاءات الترتيبية حيث:

$$\begin{aligned} \mu_{1:n} &= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\theta_i} \right)} , \\ \mu_{1:n}^{(2)} &= \frac{2}{\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\theta_i} \right)} \mu_{1:n} \\ &= \frac{2}{\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\theta_i} \right)^2} . \end{aligned}$$

وعلى ذلك التباين لأصغر الإحصاءات الترتيبية (Y_1) هو:

$$\begin{aligned} \sigma_{1:n}^2 &= \mu_{1:n}^{(2)} - \left(\mu_{1:n} \right)^2 \\ &= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\theta_i} \right)^2} . \end{aligned}$$

عندما $n=3$ فإن:

$$\begin{aligned} \mu_{1:3} &= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\theta_i} \right)} = \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3}} , \\ \mu_{1:3}^{(2)} &= \frac{2}{\left(\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3} \right)^2} , \quad (٥٠٧) \\ \sigma_{1:3}^2 &= \frac{1}{\left(\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3} \right)^2} . \end{aligned}$$

(ب) علاقة لعزوم الإحصاء الترتيبى من الرتبة r (Y_r) :

لكل $k = 0, 1, 2, \dots$, $2 \leq r \leq n$ فإن :

$$\mu_{r:n}^{(k+1)} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\theta_i} \right)} \left\{ (k+1) \mu_{r:n}^{(k)} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\theta_i} \mu_{r-1:n-1}^{[i](k+1)} \right\} \quad (6.7)$$

ومن (6.7) بوضع $n=3$, $r=2$ نحصل على عزوم الإحصاء الترتيبى Y_2 كالتالى:

$$\begin{aligned} \mu_{2:3}^{(1)} &= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\theta_i} \right)} \left(1 + \frac{1}{\theta_1} \mu_{1:2}^{[1]} + \frac{1}{\theta_2} \mu_{1:2}^{[2]} + \frac{1}{\theta_3} \mu_{1:2}^{[3]} \right) \\ &= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\theta_i} \right)} \left(1 + \frac{1}{\theta_1} \frac{1}{\frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3}} + \frac{1}{\theta_2} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_3}} + \frac{1}{\theta_3} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}} \right), \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$\mu_{2:3}^{(2)} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\theta_i} \right)} \left\{ 2\mu_{2:3}^{(1)} + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\theta_i} \mu_{1:2}^{[i](2)} \right\}. \quad (8.7)$$

وبالتعويض من (7.7) فى (8.7) نحصل على:

$$\begin{aligned} \mu_{2:3}^{(2)} &= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\theta_i} \right)} \left\{ \frac{2}{\left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\theta_i} \right)} \left(1 + \frac{1}{\theta_1} \frac{1}{\frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3}} + \frac{1}{\theta_2} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_3}} + \frac{1}{\theta_3} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\theta_1} \mu_{1:2}^{[1](2)} + \frac{1}{\theta_2} \mu_{1:2}^{2} + \frac{1}{\theta_3} \mu_{1:2}^{[3](2)} \right\}. \end{aligned} \quad (9.7)$$

وبالتعويض من (9.7) فى (4.7) نحصل على :

$$\mu_{2:3}^{(2)} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\theta_i} \right)} \left\{ \frac{2}{\left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\theta_i} \right)} \left(1 + \frac{1}{\theta_1} \frac{1}{\frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3}} + \frac{1}{\theta_2} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_3}} + \frac{1}{\theta_3} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\theta_1} \frac{2}{\left(\frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3}\right)^2} + \frac{1}{\theta_2} \frac{2}{\left(\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_3}\right)^2} + \frac{1}{\theta_3} \frac{2}{\left(\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}\right)^2} \right\} \quad (١٠٠٧)$$

وبالتالى فإن تباين الإحصاء الترتيبى Y_2 هو :

$$\sigma_{2:3}^2 = \mu_{2:3}^{(2)} - (\mu_{2:3}^{(1)})^2. \quad (١١٠٧)$$

وبالتعويض من (١٠٠٧) و (٧٠٧) فى (١١٠٧) نحصل على:

$$\begin{aligned} \sigma_{2:3}^2 = & \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\theta_i}\right)} \left\{ \frac{2}{\left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\theta_i}\right)} \left(1 + \frac{1}{\theta_1} \frac{1}{\frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3}} + \frac{1}{\theta_2} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_3}} + \frac{1}{\theta_3} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{\theta_1} \frac{2}{\left(\frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3}\right)^2} + \frac{1}{\theta_2} \frac{2}{\left(\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_3}\right)^2} + \frac{1}{\theta_3} \frac{2}{\left(\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}\right)^2} \right\} \\ & - \left[\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\theta_i}\right)} \left(1 + \frac{1}{\theta_1} \frac{1}{\frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3}} + \frac{1}{\theta_2} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_3}} + \frac{1}{\theta_3} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}} \right) \right]^2, \quad (١٢٠٧) \end{aligned}$$

ومن (٦.٧) بوضع $n=3, r=3$ نحصل على عزوم أكبر الإحصاءات كالتالى:

$$\begin{aligned} \mu_{3:3}^{(1)} = & \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\theta_i}\right)} \left(1 + \frac{1}{\theta_1} \mu_{2:2}^{[1]} + \frac{1}{\theta_2} \mu_{2:2}^{[2]} + \frac{1}{\theta_3} \mu_{2:2}^{[3]} \right) \\ = & \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\theta_i}\right)} \left(1 + \frac{1}{\theta_1} \frac{1}{\frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3}} \left(1 + \frac{\theta_3}{\theta_2} + \frac{\theta_2}{\theta_3} \right) + \frac{1}{\theta_2} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_3}} \left(1 + \frac{\theta_3}{\theta_1} + \frac{\theta_1}{\theta_3} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{\theta_3} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}} \left(1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} + \frac{\theta_1}{\theta_2} \right) \right), \quad (١٣٠٧) \end{aligned}$$

$$\mu_{3:3}^{(2)} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\theta_i}\right)} \left\{ 2\mu_{3:3}^{(1)} + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\theta_i} \mu_{2:2}^{[i](2)} \right\}. \quad (14.7)$$

وبالتعويض من (13.7) في (14.7) نحصل على:

$$\mu_{3:3}^{(2)} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\theta_i}\right)} \left\{ \frac{2}{\left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\theta_i}\right)} \left(1 + \frac{1}{\theta_1} \frac{1}{\frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3}} (1 + \frac{\theta_3}{\theta_2} + \frac{\theta_2}{\theta_3}) + \frac{1}{\theta_2} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_3}} (1 + \frac{\theta_3}{\theta_1} + \frac{\theta_1}{\theta_3}) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\theta_3} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}} (1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} + \frac{\theta_1}{\theta_2}) \right) + \left(\frac{1}{\theta_1} \mu_{2:2}^{[1](2)} + \frac{1}{\theta_2} \mu_{2:2}^{2} + \frac{1}{\theta_3} \mu_{2:2}^{[3](2)} \right) \right\}. \quad (15.7)$$

وباستخدام (6.7) مرة أخرى في العلاقة (15.7) نحصل على:

$$\mu_{3:3}^{(2)} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\theta_i}\right)} \left\{ \frac{2}{\left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\theta_i}\right)} \left(1 + \frac{1}{\theta_1} \frac{1}{\frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3}} (1 + \frac{\theta_3}{\theta_2} + \frac{\theta_2}{\theta_3}) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\theta_2} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_3}} (1 + \frac{\theta_3}{\theta_1} + \frac{\theta_1}{\theta_3}) + \frac{1}{\theta_3} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}} (1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} + \frac{\theta_1}{\theta_2}) \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{\theta_1} \frac{1}{\frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3}} \left(\frac{2}{\frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3}} (1 + \frac{\theta_3}{\theta_2} + \frac{\theta_2}{\theta_3}) + \frac{2\theta_3^2}{\theta_2} + \frac{2\theta_2^2}{\theta_3} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\theta_2} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_3}} \left(\frac{2}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_3}} (1 + \frac{\theta_3}{\theta_1} + \frac{\theta_1}{\theta_3}) + \frac{2\theta_3^2}{\theta_1} + \frac{2\theta_1^2}{\theta_3} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\theta_3} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}} \left(\frac{2}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}} (1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} + \frac{\theta_1}{\theta_2}) + \frac{2\theta_2^2}{\theta_1} + \frac{2\theta_1^2}{\theta_2} \right) \right) \right\} \quad (16.7)$$

ونحصل على التباين بالتعويض من (١٥٠٧) (١٦٠٧) كالتالي:

$$\begin{aligned} \sigma_{3:3}^2 = & \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\theta_i}\right)} \left\{ \frac{2}{\left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\theta_i}\right)} \left(1 + \frac{1}{\theta_1} \frac{1}{\frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3}} \left(1 + \frac{\theta_3}{\theta_2} + \frac{\theta_2}{\theta_3} \right) \right. \right. \\ & + \frac{1}{\theta_2} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_3}} \left(1 + \frac{\theta_3}{\theta_1} + \frac{\theta_1}{\theta_3} \right) + \frac{1}{\theta_3} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}} \left(1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} + \frac{\theta_1}{\theta_2} \right) \Big) \\ & + \left(\frac{1}{\theta_1} \frac{1}{\frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3}} \left(\frac{2}{\frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3}} \left(1 + \frac{\theta_3}{\theta_2} + \frac{\theta_2}{\theta_3} \right) + \frac{2\theta_3^2}{\theta_2} + \frac{2\theta_2^2}{\theta_3} \right) \right. \\ & + \frac{1}{\theta_2} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_3}} \left(\frac{2}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_3}} \left(1 + \frac{\theta_3}{\theta_1} + \frac{\theta_1}{\theta_3} \right) + \frac{2\theta_3^2}{\theta_1} + \frac{2\theta_1^2}{\theta_3} \right) \\ & + \frac{1}{\theta_3} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}} \left(\frac{2}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}} \left(1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} + \frac{\theta_1}{\theta_2} \right) + \frac{2\theta_2^2}{\theta_1} + \frac{2\theta_1^2}{\theta_2} \right) \Big) \Big\} \\ & - \left(\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\theta_i}\right)} \left(1 + \frac{1}{\theta_1} \frac{1}{\frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3}} \left(1 + \frac{\theta_3}{\theta_2} + \frac{\theta_2}{\theta_3} \right) + \frac{1}{\theta_2} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_3}} \left(1 + \frac{\theta_3}{\theta_1} + \frac{\theta_1}{\theta_3} \right) \right. \right. \\ & + \frac{1}{\theta_3} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}} \left(1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} + \frac{\theta_1}{\theta_2} \right) \Big) \Big)^2 \Bigg\}. \end{aligned} \quad (١٧٠٧)$$

(ج) علاقة تكرارية لتوقع حاصل ضرب أصغر إحصاءين ترتيبيين متتاليين:

$$\mu_{1,2:n} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\theta_i}\right)} \{ \mu_{1:n} + \mu_{2:n} \} \quad (١٨٠٧)$$

فعلى سبيل المثال بوضع $n=3$ في (١٨٠٧) نحصل على:

$$\mu_{1,2:3} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\theta_i}\right)} \{\mu_{1:3} + \mu_{2:3}\}$$

ومن العلاقتين (٤٠٧) و (٦٠٧) نحصل على $\mu_{1,2:3}$ كالتالى:

$$\mu_{1,2:3} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\theta_i}\right)} \left\{ \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\theta_i}\right)} + \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\theta_i}\right)} \left[1 + \frac{1}{\theta_1} \left(\frac{1}{\frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3}} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\theta_2} \left(\frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_3}} \right) + \frac{1}{\theta_3} \left(\frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}} \right) \right] \right\}.$$

(د) علاقة تكرارية لتوقع حاصل ضرب أي احصاءين ترتيبين متاليين:

$$\mu_{r,r+1:n} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\theta_i}\right)} \{\mu_{r:n} + \mu_{r+1:n} \\ + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\theta_i} \mu_{r-1,r:n-1}^{[i]}\} \quad (١٩٠٧)$$

ويمكن توضيح ذلك عندما $n=3, r=2$ كالتالى:

$$\mu_{2,3:3} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\theta_i}\right)} \left\{ (\mu_{2:3} + \mu_{3:3}) + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\theta_i} \mu_{1,2:2}^{[i]} \right\} \\ = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\theta_i}\right)} \left\{ (\mu_{2:3} + \mu_{3:3}) + \frac{1}{\theta_1} \mu_{1,2:2}^{[1]} + \frac{1}{\theta_2} \mu_{1,2:2}^{[2]} + \frac{1}{\theta_3} \mu_{1,2:2}^{[3]} \right\} \quad (٢٠٠٧)$$

وبالتعويض من العلاقات المناسبة في العلاقة (٢٠٠٧) نحصل على:

$$\mu_{2,3:3} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\theta_i}\right)} \left[\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\theta_i}\right)} \left(1 + \frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3}} + \frac{1}{\theta_2} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_3}} + \frac{1}{\theta_3} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\theta_i}\right)} \left[1 + \frac{1}{\theta_1} \frac{1}{\frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3}} (1 + \frac{\theta_3}{\theta_2} + \frac{\theta_2}{\theta_3}) + \frac{1}{\theta_2} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_3}} (1 + \frac{\theta_3}{\theta_1} + \frac{\theta_1}{\theta_3}) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\theta_3} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}} (1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} + \frac{\theta_1}{\theta_2}) \right] + \frac{1}{\theta_1} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}} + \frac{1}{\theta_2} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_3}} + \frac{1}{\theta_3} \frac{1}{\frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3}} \right] \quad (٢١٠٧)$$

(هـ) علاقة تكرارية لتوقع حاصل ضرب أصغر الاحصاءات الترتيبية وأي إحصاء آخر:
لكل : $3 \leq s \leq n-1$ فإن:

$$\mu_{1,s:n} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\theta_i}\right)} \{ \mu_{1:n} + \mu_{s:n} \} \quad (٢٢٠٧)$$

(و) علاقة تكرارية لتوقع حاصل ضرب أي احصائين
لكل : $2 \leq r < s \leq n, s-r \geq 2$ فإن:

$$\mu_{r,s:n} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\theta_i}\right)} \left\{ (\mu_{r:n} + \mu_{s:n}) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\theta_i} \mu_{r-1,s-1:n-1}^{[i]} \right\}.$$

(٧-٢-٢) توزيع وايل

تمكن Barakat & Abdelkader (2000) من إيجاد عزوم الإحصاءات الترتيبية من توزيعات وايل في شكل علاقات تكرارية بطريقة سهلة لا تحتاج لأي فروض معينة ، كوجود

علاقة خطية بين دالة كثافة الاحتمال ودالة التوزيع التجميعية للتوزيع المستخدم وقد تم إيجاد العزم k لأصغر الإحصاءات الترتيبية وأكبرها $\mu_{n:n}^{(k)}$, $\mu_{1:n}^{(k)}$ من عينه حجمها n وكذلك العزم k لأي إحصاء ترتبي $\mu_{r:n}^{(k)}$, $r \leq n$ من عينه حجمها n .

(أ) علاقة تكرارية لعزوم أكبر الإحصاءات الترتيبية من توزيعات واييل:
لكل $n = 1, 2, \dots$, $k = 1, 2, \dots$ فإن:

$$\mu_{n:n}^{(k)} = B(k, \beta) \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} I_j, \quad (23.7)$$

$$\mu_{1:n}^{(k)} = I_n B(k, \beta),$$

حيث:

$$I_j = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq n} \frac{1}{(\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \dots + \alpha_{i_j})^{\frac{k}{\beta}}}, \quad (24.7)$$

$$B(k, \beta) = \frac{k \Gamma\left(\frac{k}{\beta}\right)}{\beta} \text{ و } \Gamma(.) \text{ هي دالة جاما.}$$

وعند أحجام عينات $n = 3, 5$ يمكن إيجاد المتوسط والعزم الثاني حول الصفر والتباين لأكثر الإحصاءات الترتيبية كمايلي:

$$\therefore \mu_{3:3}^{(k)} = B(k, \beta) \sum_{j=1}^3 (-1)^{j+1} I_j, \quad (25.7)$$

$$= B(k, \beta) (I_1 - I_2 + I_3).$$

$$\text{ومن العلاقة (24.7) وحيث } B(k, \beta) = \frac{k \Gamma\left(\frac{k}{\beta}\right)}{\beta} \text{ فإن:}$$

$$\therefore \mu_{3:3}^{(k)} = \frac{k \Gamma\left(\frac{k}{\beta}\right)}{\beta} \left(\frac{1}{(\alpha_1)^{\frac{k}{\beta}}} + \frac{1}{(\alpha_2)^{\frac{k}{\beta}}} + \frac{1}{(\alpha_3)^{\frac{k}{\beta}}} - \frac{1}{(\alpha_1 + \alpha_2)^{\frac{k}{\beta}}} \right. \\ \left. - \frac{1}{(\alpha_1 + \alpha_3)^{\frac{k}{\beta}}} - \frac{1}{(\alpha_2 + \alpha_3)^{\frac{k}{\beta}}} + \frac{1}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^{\frac{k}{\beta}}} \right). \quad (26.7)$$

ويكون المتوسط والعزم الثانى والتباين لأكبر الإحصاءات الترتيبية من (٢٦٠٧) كالتالى:

$$\mu_{3:3}^{(1)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)}{\beta} \left(\frac{1}{(\alpha_1)^{\frac{1}{\beta}}} + \frac{1}{(\alpha_2)^{\frac{1}{\beta}}} + \frac{1}{(\alpha_3)^{\frac{1}{\beta}}} - \frac{1}{(\alpha_1 + \alpha_2)^{\frac{1}{\beta}}} \right. \\ \left. - \frac{1}{(\alpha_1 + \alpha_3)^{\frac{1}{\beta}}} - \frac{1}{(\alpha_2 + \alpha_3)^{\frac{1}{\beta}}} + \frac{1}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^{\frac{1}{\beta}}} \right), \quad (27.7)$$

$$\mu_{3:3}^{(2)} = \frac{2\Gamma\left(\frac{2}{\beta}\right)}{\beta} \left(\frac{1}{(\alpha_1)^{\frac{2}{\beta}}} + \frac{1}{(\alpha_2)^{\frac{2}{\beta}}} + \frac{1}{(\alpha_3)^{\frac{2}{\beta}}} - \frac{1}{(\alpha_1 + \alpha_2)^{\frac{2}{\beta}}} \right. \\ \left. - \frac{1}{(\alpha_1 + \alpha_3)^{\frac{2}{\beta}}} - \frac{1}{(\alpha_2 + \alpha_3)^{\frac{2}{\beta}}} + \frac{1}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^{\frac{2}{\beta}}} \right), \quad (28.7)$$

$$\sigma_{3:3}^{(2)} = \frac{2\Gamma\left(\frac{2}{\beta}\right)}{\beta} \left(\frac{1}{(\alpha_1)^{\frac{2}{\beta}}} + \frac{1}{(\alpha_2)^{\frac{2}{\beta}}} + \frac{1}{(\alpha_3)^{\frac{2}{\beta}}} - \frac{1}{(\alpha_1 + \alpha_2)^{\frac{2}{\beta}}} \right. \\ \left. - \frac{1}{(\alpha_1 + \alpha_3)^{\frac{2}{\beta}}} - \frac{1}{(\alpha_2 + \alpha_3)^{\frac{2}{\beta}}} + \frac{1}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^{\frac{2}{\beta}}} \right) \\ - \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)}{\beta} \left(\frac{1}{(\alpha_1)^{\frac{1}{\beta}}} + \frac{1}{(\alpha_2)^{\frac{1}{\beta}}} + \frac{1}{(\alpha_3)^{\frac{1}{\beta}}} - \frac{1}{(\alpha_1 + \alpha_2)^{\frac{1}{\beta}}} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{(\alpha_1 + \alpha_3)^{\frac{1}{\beta}}} - \frac{1}{(\alpha_2 + \alpha_3)^{\frac{1}{\beta}}} + \frac{1}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^{\frac{1}{\beta}}} \right) \right]^2 \quad (29.7)$$

(ب) علاقة تكرارية لعزوم اصغر الاحصاءات الترتيبية

$$\mu_{l:n}^{(k)} = B(k, \beta) I_n \quad (30.7)$$

والتي منها يتم الحصول على الوسط الحسابى للإحصاء الترتيبى Y_l :

$$\begin{aligned}\mu_{1:n} &= B(1, \beta) I_n \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)}{\beta(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)^{\frac{1}{\beta}}},\end{aligned}\quad (31.7)$$

والعزم الثاني للإحصاء الترتيبي Y_1 هو:

$$\begin{aligned}\mu_{1:n}^{(2)} &= B(2, \beta) I_n \\ &= \frac{2\Gamma\left(\frac{2}{\beta}\right)}{\beta\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)^{\frac{2}{\beta}}},\end{aligned}\quad (32.7)$$

والتباين للإحصاء الترتيبي Y_1 هو:

$$\begin{aligned}\sigma_{1:n}^{(2)} &= \mu_{1:n}^{(2)} - (\mu_{1:n})^2 \\ &= \frac{2\Gamma\left(\frac{2}{\beta}\right)}{\beta\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)^{\frac{2}{\beta}}} - \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)}{\beta\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)^{\frac{1}{\beta}}}\right)^2\end{aligned}\quad (33.7)$$

وبوضع $n=3$ في (31.7) و (32.7) و (33.7) يتم الحصول على:

$$\mu_{1:3} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)}{\beta(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^{\frac{1}{\beta}}}, \quad (34.7)$$

$$\mu_{1:3}^{(2)} = \frac{2\Gamma\left(\frac{2}{\beta}\right)}{\beta(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^{\frac{2}{\beta}}}, \quad (35.7)$$

$$\sigma_{1:3}^2 = \frac{2\Gamma\left(\frac{2}{\beta}\right)}{\beta\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i\right)^{\frac{2}{\beta}}} - \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)}{\beta\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i\right)^{\frac{1}{\beta}}}\right)^2. \quad (36.7)$$

(ج) علاقة تكرارية لعزوم الاحصاء الترتيبي من الرتبة r :

لكل $k=1,2,\dots$, $r=1,2,\dots$ فإن:

$$\mu_{r:n}^{(k)} = \mu_{r-1:n}^{(k)} + \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1} A_j B(k, \beta) I_{n-r+j}, \quad (37.7)$$

حيث المتتالية $\{I_j\}_{j=1}^{j=r}$ عرفت في (24.7) و

$$B(k, \beta) = \frac{k \Gamma\left(\frac{k}{\beta}\right)}{\beta}, \quad (38.7)$$

$$A_j = \binom{n-r+j}{j-1},$$

مع اعتبار ان $\mu_{0:n}^{(k)} = 0$.

وعند أحجام عينات $n=3,5$ يمكن إيجاد الوسط الحسابي والعزم الثاني حول الصفر والتباين لوسيط الإحصاءات الترتيبية كمايلي:

من العلاقة (37.7) بوضع $r=2$, $n=3$ يتم الحصول على:

$$\mu_{2:3}^{(k)} = \mu_{1:3}^{(k)} + \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} B(k, \beta) A_j I_{1+j} \quad (40.7)$$

$$= \frac{B(k, \beta)}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^{\frac{1}{\beta}}} + B(k, \beta) [I_2 - 3I_3],$$

$$B(k, \beta) = \frac{k \Gamma\left(\frac{k}{\beta}\right)}{\beta}, \quad (41.7)$$

$$I_2 = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 3} \frac{1}{(\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2})^{\frac{k}{\beta}}} = \frac{1}{(\alpha_1 + \alpha_2)^{\frac{k}{\beta}}} + \frac{1}{(\alpha_1 + \alpha_3)^{\frac{k}{\beta}}} + \frac{1}{(\alpha_2 + \alpha_3)^{\frac{k}{\beta}}}, \quad (42.7)$$

$$I_3 = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 3} \frac{1}{(\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \alpha_{i_3})^{\frac{k}{\beta}}}. \quad (43.7)$$

وبالتعويض من (43.7) و (42.7) و (41.7) في (40.7) نحصل على:

$$\mu_{2:3}^{(k)} = \frac{k\Gamma\left(\frac{k}{\beta}\right)}{\beta} \left(\frac{1}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^{\frac{k}{\beta}}} + \frac{1}{(\alpha_1 + \alpha_2)^{\frac{k}{\beta}}} + \frac{1}{(\alpha_1 + \alpha_3)^{\frac{k}{\beta}}} \right. \\ \left. + \frac{1}{(\alpha_2 + \alpha_3)^{\frac{k}{\beta}}} - \frac{3k\Gamma\left(\frac{k}{\beta}\right)}{\beta} \left(\frac{1}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^{\frac{k}{\beta}}} \right) \right). \quad (44.7)$$

وبالمثل وبوضع $r=3$, $n=5$ في (37.7) يتم الحصول على:

$$\mu_{3:5}^{(k)} = \mu_{2:5}^{(k)} + \frac{k\Gamma\left(\frac{k}{\beta}\right)}{\beta} (I_3 - 4I_4 + 10I_5), \quad (45.7)$$

$$\mu_{2:5}^{(k)} = \mu_{1:5}^{(k)} + \frac{k\Gamma\left(\frac{k}{\beta}\right)}{\beta} (I_4 - 5I_5), \quad (46.7)$$

$$\mu_{1:5}^{(k)} = \frac{k\Gamma\left(\frac{k}{\beta}\right)}{\beta} I_5. \quad (47.7)$$

وبالتعويض من (47.7) و (46.7) في (45.7) يتم الحصول على:

$$\mu_{3:5}^{(k)} = \frac{k\Gamma\left(\frac{k}{\beta}\right)}{\beta} (I_3 - 3I_4 + 6I_5). \quad (48.7)$$

ومن العلاقة (24.7) فإن:

$$I_3 = \sum_{t \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 5} \frac{1}{(\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \alpha_{i_3})^{\frac{k}{\beta}}}, \quad (49.7)$$

$$I_4 = \sum_{t \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq 5} \frac{1}{(\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \alpha_{i_3} + \alpha_{i_4})^{\frac{k}{\beta}}}, \quad (50.7)$$

$$I_5 = \sum_{t \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < i_5 \leq 5} \frac{1}{(\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \alpha_{i_3} + \alpha_{i_4} + \alpha_{i_5})^{\frac{k}{\beta}}}, \quad (51.7)$$

والتعويض من (51.7) و (50.7) و (49.7) في (48.7) يتم الحصول على:

$$\mu_{3:5}^{(k)} = \frac{k\Gamma\left(\frac{k}{\beta}\right)}{\beta} \left(\frac{6}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5)^{\frac{k}{\beta}}} - \frac{3}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)^{\frac{k}{\beta}}} \right. \\ - \frac{3}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5)^{\frac{k}{\beta}}} - \frac{3}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5)^{\frac{k}{\beta}}} \\ - \frac{3}{(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5)^{\frac{k}{\beta}}} - \frac{3}{(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5)^{\frac{k}{\beta}}} \\ + \frac{1}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^{\frac{k}{\beta}}} + \frac{1}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4)^{\frac{k}{\beta}}} + \frac{1}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_5)^{\frac{k}{\beta}}} \\ + \frac{1}{(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4)^{\frac{k}{\beta}}} + \frac{1}{(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5)^{\frac{k}{\beta}}} + \frac{1}{(\alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_5)^{\frac{k}{\beta}}} \\ + \frac{1}{(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)^{\frac{k}{\beta}}} + \frac{1}{(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5)^{\frac{k}{\beta}}} + \frac{1}{(\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5)^{\frac{k}{\beta}}} \\ \left. + \frac{1}{(\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5)^{\frac{k}{\beta}}} \right). \quad (52.7)$$

(٣-٢-٧) توزيع باريتو

(أ) علاقة تكرارية لعزوم أصغر الإحصاءات الترتيبية:

لكل $n \geq 1, k = 0, 1, 2, \dots$ فإن:

$$\mu_{1:n}^{(k)} = \frac{\sum_{i=1}^n v_i}{\sum_{i=1}^n v_i - k} \quad (53.7)$$

وعندما $n = 3$ ومن (53.7) يتم الحصول على المتوسط للإحصاء الترتيبى Y_1 كالتالى :

$$\mu_{1:3} = \frac{v_1 + v_2 + v_3}{v_1 + v_2 + v_3 - 1}, \quad (54.7)$$

والعزم الثانى حول الصفر للإحصاء الترتيبى Y_1 هو :

$$\mu_{1:3}^{(2)} = \frac{v_1 + v_2 + v_3}{v_1 + v_2 + v_3 - 2}, \quad (55.7)$$

والتاين للإحصاء الترتيبي Y_1 هو:

$$\sigma_{1:3}^2 = \mu_{1:3}^{(2)} - (\mu_{1:3})^2$$

$$= \frac{v_1 + v_2 + v_3}{v_1 + v_2 + v_3 - 2} - \left(\frac{v_1 + v_2 + v_3}{v_1 + v_2 + v_3 - 1} \right)^2. \quad (56.7)$$

(ب) علاقة تكرارية لعزوم الإحصاء الترتيبي من الرتبة r :

لكل $n \geq 1, k = 0, 1, 2, \dots$ فإن:

$$\mu_{r:n}^{(k)} = \frac{\sum_{i=1}^n v_i \mu_{r-1:n-1}^{[i](k)}}{\left(\sum_{i=1}^n v_i \right) - k} \quad (57.7)$$

بوضع $r=2, n=3$ في (57.7) يتم الحصول على:

$$\mu_{2:3}^{(k)} = \frac{\sum_{i=1}^3 v_i \mu_{1:2}^{[i](k)}}{\left(\sum_{i=1}^3 v_i \right) - k} = \frac{v_1 \mu_{1:2}^{[1](k)} + v_2 \mu_{1:2}^{[2](k)} + v_3 \mu_{1:2}^{[3](k)}}{\left(\sum_{i=1}^3 v_i \right) - k}$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^3 v_i \right) - k} \left(v_1 \frac{\sum_{i=2}^3 v_i}{\sum_{i=2}^3 v_i - k} + v_2 \frac{\sum_{i=1, i \neq 2}^3 v_i}{\sum_{i=1, i \neq 2}^3 v_i - k} + v_3 \frac{\sum_{i=1}^2 v_i}{\sum_{i=1}^2 v_i - k} \right). \quad (58.7)$$

ومن العلاقة (58.7) يمكن حساب المتوسط والعزم الثاني والتاين للإحصاء الترتيبي Y_2 كما يلي:

$$\mu_{2:3} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^3 v_i \right) - 1} \left(v_1 \frac{\sum_{i=2}^3 v_i}{\sum_{i=2}^3 v_i - 1} + v_2 \frac{\sum_{i=1, i \neq 2}^3 v_i}{\sum_{i=1, i \neq 2}^3 v_i - 1} + v_3 \frac{\sum_{i=1}^2 v_i}{\sum_{i=1}^2 v_i - 1} \right). \quad (59.7)$$

$$\mu_{2:3}^{(2)} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^3 v_i \right) - 2} \left(v_1 \frac{\sum_{i=2}^3 v_i}{\sum_{i=2}^3 v_i - 2} + v_2 \frac{\sum_{i=1, i \neq 2}^3 v_i}{\sum_{i=1, i \neq 2}^3 v_i - 2} + v_3 \frac{\sum_{i=1}^2 v_i}{\sum_{i=1}^2 v_i - 2} \right). \quad (60.7)$$

$$\sigma_{2:3}^{(2)} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^3 v_i\right) - 2} \left(v_1 \frac{\sum_{i=2}^3 v_i}{\sum_{i=2}^3 v_i - 2} + v_2 \frac{\sum_{i=1, i \neq 2}^3 v_i}{\sum_{i=1, i \neq 2}^3 v_i - 2} + v_3 \frac{\sum_{i=1}^2 v_i}{\sum_{i=1}^2 v_i - 2} \right) - \left(\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^3 v_i\right) - 1} \left(v_1 \frac{\sum_{i=2}^3 v_i}{\sum_{i=2}^3 v_i - 1} + v_2 \frac{\sum_{i=1, i \neq 2}^3 v_i}{\sum_{i=1, i \neq 2}^3 v_i - 1} + v_3 \frac{\sum_{i=1}^2 v_i}{\sum_{i=1}^2 v_i - 1} \right) \right)^2. \quad (61.7)$$

بوضع $r=3$, $n=3$ في (57.7) يتم الحصول على:

$$\begin{aligned} \mu_{3:3}^{(k)} &= \frac{\sum_{i=1}^3 v_i \mu_{2:2}^{[i](k)}}{\left(\sum_{i=1}^3 v_i\right) - k} \\ &= \frac{v_1 \mu_{2:2}^{[1](k)} + v_2 \mu_{2:2}^{[2](k)} + v_3 \mu_{2:2}^{[3](k)}}{\left(\sum_{i=1}^3 v_i\right) - k} \\ &= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^3 v_i\right) - k} \left(v_1 \frac{v_2 \mu_{1:1}^{[1][2](k)} + v_3 \mu_{1:1}^{[1][3](k)}}{\sum_{i=2}^3 v_i - k} \right. \\ &\quad \left. + v_2 \frac{v_1 \mu_{1:1}^{[1][2](k)} + v_3 \mu_{1:1}^{[2][3](k)}}{\sum_{i=1, i \neq 2}^3 v_i - k} + v_3 \frac{v_1 \mu_{1:1}^{[1][3](k)} + v_2 \mu_{1:1}^{[2][3](k)}}{\sum_{i=1, i \neq 2}^2 v_i - k} \right) \\ &= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^3 v_i\right) - k} \left(v_1 \frac{v_2 \frac{v_3}{v_3 - k} + v_3 \frac{v_2}{v_2 - k}}{\sum_{i=2}^3 v_i - k} \right. \\ &\quad \left. + v_2 \frac{v_1 \frac{v_3}{v_3 - k} + v_3 \frac{v_1}{v_1 - k}}{\sum_{i=1, i \neq 2}^3 v_i - k} + v_3 \frac{v_1 \frac{v_2}{v_2 - k} + v_2 \frac{v_1}{v_1 - k}}{\sum_{i=2}^2 v_i - k} \right). \quad (62.7) \end{aligned}$$

ومن (٦٢٠٧) عندما $k=1,2$ يتم الحصول على المتوسط والعزم الثاني والتباين كالتالى:

$$\mu_{3,3} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^3 v_i\right) - 1} \left(v_1 \frac{v_2 \frac{v_3}{v_3-1} + v_3 \frac{v_2}{v_2-1}}{\sum_{i=2}^3 v_i - 1} + v_2 \frac{v_1 \frac{v_3}{v_3-1} + v_3 \frac{v_1}{v_1-1}}{\sum_{i=1, i \neq 2}^3 v_i - 1} \right. \\ \left. + v_3 \frac{v_1 \frac{v_2}{v_2-1} + v_2 \frac{v_1}{v_1-1}}{\sum_{i=1}^2 v_i - 1} \right).$$

$$\mu_{3,3}^{(2)} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^3 v_i\right) - 2} \left(v_1 \frac{v_2 \frac{v_3}{v_3-2} + v_3 \frac{v_2}{v_2-2}}{\sum_{i=2}^3 v_i - 2} + v_2 \frac{v_1 \frac{v_3}{v_3-2} + v_3 \frac{v_1}{v_1-2}}{\sum_{i=1, i \neq 2}^3 v_i - 2} \right. \\ \left. + v_3 \frac{v_1 \frac{v_2}{v_2-2} + v_2 \frac{v_1}{v_1-2}}{\sum_{i=1}^2 v_i - 2} \right).$$

$$\sigma_{3,3}^{(2)} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^3 v_i\right) - 2} \left(v_1 \frac{v_2 \frac{v_3}{v_3-2} + v_3 \frac{v_2}{v_2-2}}{\sum_{i=2}^3 v_i - 2} + v_2 \frac{v_1 \frac{v_3}{v_3-2} + v_3 \frac{v_1}{v_1-2}}{\sum_{i=1, i \neq 2}^3 v_i - 2} \right. \\ \left. + v_3 \frac{v_1 \frac{v_2}{v_2-2} + v_2 \frac{v_1}{v_1-2}}{\sum_{i=1}^2 v_i - 2} \right) - \left(\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^3 v_i\right) - 1} \left(v_1 \frac{v_2 \frac{v_3}{v_3-1} + v_3 \frac{v_2}{v_2-1}}{\sum_{i=2}^3 v_i - 1} \right. \right. \\ \left. \left. + v_2 \frac{v_1 \frac{v_3}{v_3-1} + v_3 \frac{v_1}{v_1-1}}{\sum_{i=1, i \neq 2}^3 v_i - 1} + v_3 \frac{v_1 \frac{v_2}{v_2-1} + v_2 \frac{v_1}{v_1-1}}{\sum_{i=1}^2 v_i - 1} \right) \right)^2.$$

المراجع

المراجع References

أولاً: المراجع العربية:

١. امير حنا هرمز ، ١٩٩٠ ، الإحصاء الرياضى – مديرية دار الكتب للطباعة والنشر.
٢. ثروت محمد عبد المنعم ، ٢٠٠٠ ، نظرية الاحتمالات – مكتبة الانجلو المصرية.
٣. زكية بنت عامر عبد الله الصغيرى ٢٠٠٦ ، رسالة ماجستير بعنوان الاحصاءات المرتبة لمتغيرات عشوائية غير متماثلة التوزيع – كلية التربية للبنات بجده.
٤. على عبد السلام العماوى وعلى حسين العجيلى ، ١٩٩٨ ، أساسيات الإحصاء الرياضى ، ادارة المطبوعات والنشر – جامعة الفتح.
٥. محمد بن ابراهيم عقيل و عبد الرحمن بن محمد ابو عمه ، ١٩٩٨ ، نظرية الاحتمالات وتطبيقاتها ، النشر العلمى والمطابع – جامعة الملك سعود.

ثانياً: المراجع الأجنبية:

1. Balakrishnan N. (1988a). Relations and Identities for the Moments of Order Statistics From a Sample Containing a Single Outlier. Commun. Statist. – Theor. Meth., 17(7), 2173-2190.
2. Balakrishnan N. (1988b). Recurrence Relations for Order Statistics From n Independent and Non-Identically Distribution Random Variables. Ann. Inst. Statist. Math., 40, 273-277.
3. Balakrishnan N. (1992). Relationships Between Single Moments of Order Statistics from Non-identically Distributed Variables. . In Order Statistics and Nonparametric: Theory and Applications (Eds., P.k. Sen and I.A. Salama), Elsevier, Amsterdam, 65-78.

4. Balakrishnan N. (1994a). Relationships Between Product Moments of Order Statistics From Non-Identically Distributed Variables. In Proceeding of the Basque Country Meeting on Probability and Statistics (Eds., M.L. Puri and J. Vilaplana), 73-90.
5. Balakrishnan N. (1994b). Order Statistics From Non-Identical Exponential Random Variables and Some Applications. *Comput. Statist. Data Anal.* 18(2), 203-253.
6. Balakrishnan N. (1994c). On Order Statistics From Non-Identical Exponential Random Variables and Some Applications. *Commun Statist. – Theor. Meth.* 23(12), 3373-3393.
7. Barakat H. M. And Abdelkader, Y. H. (2000). Computing the Moments of Order Statistics From Non-Identically Distributed Weibull Variables. *J. Comp. Appl Math* 117(1). 85-90.
8. Barakat H. M. And Abdelkader, Y. H. (2004). Computing the Moments of Order Statistics From Non-Identical Random Variables. *Statist. Meth Appl.* 13,15-26.
9. Barry, C. A. , Balakrishnan, N., and Nagaraja, H.N. (1992). *First Course In Order Statistics*, John Wiley & Sons, New York.
10. Childs A. and Balakrishnan, N. (1998). Generalized Recurrence Relations for Moment of Order Statistics From Non-Identical Pareto and Truncated Pareto Random Variables with Applications to Robustness. In: Balakrishnan ,N. and Rao. R. C. (Eds, *Handbook of Statistics*), Elsevier, Amsterdam, 16, 403-438.

11. David, H.A. (1981) Order Statistics (Second Edition). John Wiley & Sons, New York.
12. Harter, H.L. (1961) Expected Values of Normal Order Statistics, *Biometrika*, volume 48, pages. 151-165.
13. Mahmoud M.W. (1970) A First Course In Order Statistics. Institute of National Planning (Cairo).
14. Minc, H. (1983). Theory of Permanents (1978-1981). *Linear and Multilinear Algebra*, 12, 227-263.
15. Minc, H. (1987). Theory of Permanents (1982-1985). *Linear and Multilinear Algebra*, 12, 109-198.
16. Mood, A.M., Graybill, F.A. and Boes, D.C. (1974) Introduction to the Theory of Statistics (3rd Edition) McGraw-Hill.
17. Vaughan, R. J. and Venables, W. N. (1972). Permanent Expressions for Order Statistics Densities. *J.R. Statist. Soc.*, 34, 308-310.

الملاحق

الملاحق

ملحق (١) جدول حساب $\sum_{k=0}^x b(k;n,p)$ لمتغير عشوائي يتبع توزيع ذي الحدين .

ملحق (٢) جدول المساحات تحت المنحنى الطبيعي القياسي.

ملحق (٣) جدول توزيع المدي القياسي.

ملحق (٤) جدول القيم الحرجه $t_{\alpha}(v)$ لتوزيع t .

ملحق (١)

جدول حساب $\sum_{k=0}^x b(k; n, p)$ لمتغير عشوائي يتبع توزيع ذي الحدين

a. n=5

		p														
x		0.01	0.05	0.1	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95	0.99
	0	.951	.774	.590	.328	.237	.168	.078	.031	.010	.002	.001	.000	.000	.000	.000
	1	.999	.977	.919	.737	.633	.528	.337	.188	.087	.031	.016	.007	.000	.000	.000
	2	1.00	.999	.991	.942	.896	.837	.683	.500	.317	.163	.104	.058	.009	.001	.000
	3	1.00	1.00	1.00	.993	.984	.969	.913	.812	.663	.472	.367	.263	.081	.023	.001
	4	1.00	1.00	1.00	1.00	.999	.998	.990	.969	.922	.832	.763	.672	.410	.226	.049

b. n=10

		p														
x		0.01	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95	0.99
	0	.904	.599	.349	.107	.056	.028	.006	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.996	.914	.736	.376	.244	.149	.046	.011	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	2	1.00	.988	.930	.678	.526	.383	.167	.055	.012	.002	.000	.000	.000	.000	.000
	3	1.00	.999	.987	.879	.776	.650	.382	.172	.055	.011	.004	.001	.000	.000	.000
	4	1.00	1.00	.998	.967	.922	.850	.633	.377	.166	.047	.020	.006	.000	.000	.000
	5	1.00	1.00	1.00	.994	.980	.953	.834	.623	.367	.150	.078	.033	.002	.000	.000
	6	1.00	1.00	1.00	.999	.996	.989	.945	.828	.618	.350	.224	.121	.013	.001	.000
	7	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.998	.988	.945	.833	.617	.474	.322	.070	.012	.000
	8	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.998	.989	.954	.851	.756	.624	.264	.086	.004
9	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.999	.994	.972	.944	.893	.651	.401	.096	

تابع ملحق (١)

جدول حساب $\sum_{k=0}^x b(k; n, p)$ لتغير عشوائي يتبع توزيع ذي الحدين

c. n=15

		p														
x		0.01	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95	0.99
	0	.860	.463	.206	.035	.013	.005	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.990	.829	.549	.167	.080	.035	.005	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	2	1.00	.964	.816	.398	.236	.127	.027	.004	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	3	1.00	.995	.944	.648	.461	.297	.091	.018	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	4	1.00	.999	.987	.836	.686	.515	.217	.059	.009	.001	.000	.000	.000	.000	.000
	5	1.00	1.00	.998	.939	.852	.722	.403	.151	.034	.004	.001	.000	.000	.000	.000
	6	1.00	1.00	1.00	.982	.943	.869	.610	.304	.095	.015	.004	.001	.000	.000	.000
	7	1.00	1.00	1.00	.996	.983	.950	.787	.500	.213	.050	.017	.004	.000	.000	.000
	8	1.00	1.00	1.00	.999	.996	.985	.905	.696	.390	.131	.057	.018	.000	.000	.000
	9	1.00	1.00	1.00	1.00	.999	.996	.966	.849	.597	.278	.148	.061	.002	.000	.000
	10	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.999	.991	.941	.783	.485	.314	.164	.013	.001	.000
	11	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.998	.982	.909	.703	.539	.352	.056	.005	.000
	12	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.996	.973	.873	.764	.602	.184	.036	.000
	13	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.995	.965	.920	.833	.451	.171	.010
14	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.995	.987	.965	.794	.537	.140	

المصدر : عن [Devore(1995)]

تابع ملحق (١)

جدول حساب $\sum_{k=0}^x b(k; n, p)$ لمتغير عشوائي يتبع توزيع ذي الحدين

d. n=20

		p														
X		0.01	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95	0.99
	0	.818	.358	.122	.012	.003	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.983	.736	.392	.069	.024	.008	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	2	.999	.925	.677	.206	.091	.035	.004	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	3	1.00	.984	.867	.411	.225	.107	.016	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	4	1.00	.997	.957	.630	.415	.238	.051	.006	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	5	1.00	1.00	.989	.804	.617	.416	.126	.021	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	6	1.00	1.00	.998	.913	.786	.608	.250	.058	.006	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	7	1.00	1.00	1.00	.968	.898	.772	.416	.132	.021	.001	.000	.000	.000	.000	.000
	8	1.00	1.00	1.00	.990	.959	.887	.596	.252	.057	.005	.001	.000	.000	.000	.000
	9	1.00	1.00	1.00	.997	.986	.952	.755	.412	.128	.017	.004	.001	.000	.000	.000
	10	1.00	1.00	1.00	.999	.996	.983	.872	.588	.245	.048	.014	.003	.000	.000	.000
	11	1.00	1.00	1.00	1.00	.999	.995	.943	.748	.404	.113	.041	.010	.000	.000	.000
	12	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.999	.979	.868	.584	.228	.102	.032	.000	.000	.000
	13	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.994	.942	.750	.392	.214	.087	.002	.000	.000
	14	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.998	.979	.874	.584	.383	.196	.011	.000	.000
	15	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.994	.949	.762	.585	.370	.043	.003	.000
	16	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.999	.984	.893	.775	.589	.133	.016	.000
	17	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.996	.965	.909	.794	.323	.075	.001
	18	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.999	.992	.976	.931	.608	.264	.017
19	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.999	.997	.988	.878	.642	.182	

تابع ملحق (١) جدول حساب $\sum_{k=0}^x b(k; n, p)$ لتغير عشوائي يتبع توزيع ذي الحدين

d. n=25

		P														
X		0.01	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95	0.99
	0	.778	.277	.072	.004	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.974	.642	.271	.027	.007	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	2	.998	.873	.537	.098	.032	.009	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	3	1.00	.966	.764	.234	.096	.033	.002	.000	.00	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	4	1.00	.993	.902	.421	.214	.090	.009	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	5	1.00	.999	.967	.617	.378	.193	.029	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	6	1.00	1.00	.991	.780	.561	.341	.074	.007	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	7	1.00	1.00	.998	.891	.727	.512	.154	.022	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	8	1.00	1.00	1.00	.953	.851	.677	.274	.054	.004	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	9	1.00	1.00	1.00	.983	.929	.811	.425	.115	.013	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	10	1.00	1.00	1.00	.994	.970	.902	.586	.212	.034	.002	.000	.000	.000	.000	.000
	11	1.00	1.00	1.00	.998	.980	.956	.732	.345	.078	.006	.001	.000	.000	.000	.000
	12	1.00	1.00	1.00	1.00	.997	.983	.846	.500	.154	.017	.003	.000	.000	.000	.000
	13	1.00	1.00	1.00	1.00	.999	.994	.922	.655	.268	.044	.020	.002	.000	.000	.000
	14	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.998	.966	.788	.414	.098	.030	.006	.000	.000	.000
	15	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.987	.885	.575	.189	.071	.017	.000	.000	.000
	16	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.996	.946	.726	.323	.149	.047	.000	.000	.000
	17	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.999	.978	.846	.488	.273	.109	.002	.000	.000
	18	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.993	.926	.659	.439	.220	.009	.000	.000
	19	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.998	.971	.807	.622	.383	.033	.001	.000
	20	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.991	.910	.786	.579	.098	.007	.000
	21	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.998	.967	.904	.766	.236	.034	.000
	22	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.991	.968	.902	.463	.127	.002
	23	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.998	.993	.973	.729	.358	.026
	24	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.999	.996	.928	.723	.222

ملحق (٢)

جدول المساحات تحت المنحنى الطبيعي القياسي

$$P(0 < Z < z)$$

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990

المصدر : عن [Daniel (1978)]

$$P_r(S \leq S_{n,m}(0.01)) = 0.99$$

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	90.03	135.0	104.3	185.6	202.2	215.8	227.2	237.0	245.6	253.2	260.0	266.2	271.8	277.0	281.8	286.3	290.4	294.3	298.0
2	14.04	19.02	22.29	24.72	26.63	28.20	29.53	30.68	31.69	32.59	33.40	34.13	34.81	35.43	36.00	36.53	37.03	37.50	37.95
3	8.26	10.62	12.17	13.33	14.24	15.00	15.64	16.20	16.69	17.13	17.53	17.89	18.22	18.52	18.81	19.07	19.32	19.55	19.77
4	6.51	8.12	9.17	9.96	10.58	11.10	11.55	11.93	12.27	12.57	12.84	13.09	13.32	13.53	13.73	13.91	14.08	14.24	14.40
5	5.70	6.98	7.80	8.42	8.91	9.32	9.67	9.97	10.24	10.48	10.70	10.89	11.08	11.24	11.40	11.55	11.68	11.81	11.93
6	5.24	6.33	7.03	7.56	7.97	8.32	8.61	8.87	9.10	9.30	9.48	9.65	9.81	9.95	10.08	10.21	10.32	10.43	10.54
7	4.95	5.92	6.54	7.01	7.37	7.68	7.94	8.17	8.36	8.55	8.71	8.86	9.00	9.12	9.24	9.35	9.46	9.55	9.65
8	4.75	5.64	6.20	6.62	6.96	7.24	7.47	7.68	7.86	8.03	8.18	8.31	8.44	8.55	8.66	8.76	8.85	8.94	9.03
9	4.60	5.43	5.96	6.35	6.66	6.91	7.13	7.33	7.49	7.65	7.78	7.91	8.03	8.13	8.23	8.33	8.41	8.49	8.57
10	4.48	5.27	5.77	6.14	6.43	6.67	6.87	7.05	7.21	7.36	7.49	7.60	7.71	7.81	7.91	7.99	8.08	8.15	8.23
11	4.39	5.15	5.62	5.97	6.25	6.48	6.67	6.84	6.99	7.13	7.25	7.36	7.46	7.56	7.65	7.73	7.81	7.88	7.95
12	4.32	5.05	5.50	5.84	6.10	6.32	6.51	6.67	6.81	6.94	7.06	7.17	7.26	7.36	7.44	7.52	7.59	7.66	7.73
13	4.26	4.96	5.40	5.73	5.98	6.19	6.37	6.53	6.67	6.79	6.90	7.01	7.10	7.19	7.27	7.35	7.42	7.48	7.55
14	4.21	4.89	5.32	5.63	5.88	6.08	6.26	6.41	6.54	6.66	6.77	6.87	6.96	7.05	7.13	7.20	7.27	7.33	7.39
15	4.17	4.84	5.25	5.56	5.80	5.99	6.16	6.31	6.44	6.55	6.66	6.76	6.84	6.93	7.00	7.07	7.14	7.20	7.26
16	4.13	4.79	5.19	5.49	5.72	5.92	6.08	6.22	6.35	6.46	6.56	6.66	6.74	6.82	6.90	6.97	7.03	7.09	7.15
17	4.10	4.74	5.14	5.43	5.66	5.85	6.01	6.15	6.27	6.38	6.48	6.57	6.66	6.73	6.81	6.87	6.94	7.00	7.05
18	4.07	4.70	5.09	5.38	5.60	5.79	5.94	6.08	6.20	6.31	6.41	6.50	6.58	6.65	6.73	6.79	6.85	6.91	6.97
19	4.05	4.67	5.05	5.33	5.55	5.73	5.89	6.02	6.14	6.25	6.34	6.43	6.51	6.58	6.65	6.72	6.78	6.84	6.89
20	4.02	4.64	5.02	5.29	5.51	5.69	5.84	5.97	6.09	6.19	6.28	6.37	6.45	6.52	6.59	6.65	6.71	6.77	6.82
24	3.96	4.55	4.91	5.17	5.37	5.54	5.69	5.81	5.92	6.02	6.11	6.19	6.26	6.33	6.39	6.45	6.51	6.56	6.61
28	3.89	4.45	4.80	5.05	5.24	5.40	5.54	5.65	5.76	5.85	5.93	6.01	6.08	6.14	6.20	6.26	6.31	6.36	6.41
40	3.82	4.37	4.70	4.93	5.11	5.26	5.39	5.50	5.60	5.69	5.76	5.83	5.90	5.96	6.02	6.07	6.12	6.16	6.21
60	3.76	4.28	4.59	4.82	4.99	5.13	5.25	5.36	5.45	5.53	5.60	5.67	5.73	5.78	5.84	5.89	5.93	5.97	6.01
120	3.70	4.20	4.50	4.71	4.87	5.01	5.12	5.21	5.30	5.37	5.44	5.50	5.56	5.61	5.66	5.71	5.75	5.79	5.83
∞	3.64	4.12	4.40	4.60	4.76	4.88	4.99	5.08	5.16	5.23	5.29	5.35	5.40	5.45	5.49	5.54	5.57	5.61	5.65

توزيع التباين المشترك (3) تابع ملحق

$$P_r(S \leq S_{n,m}(0.05)) = 0.95$$

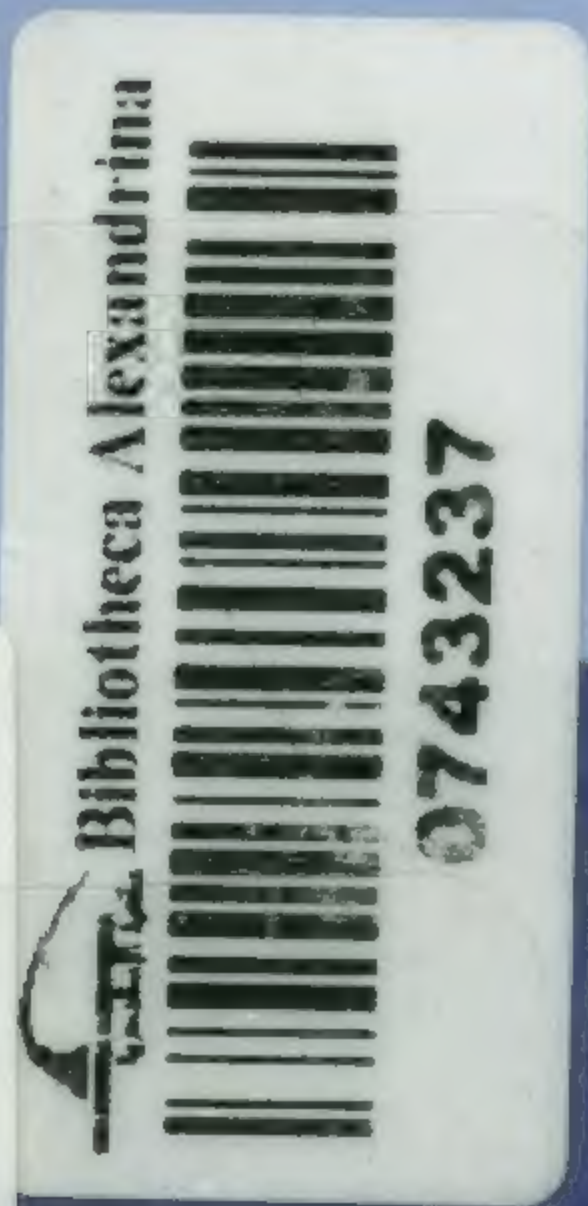
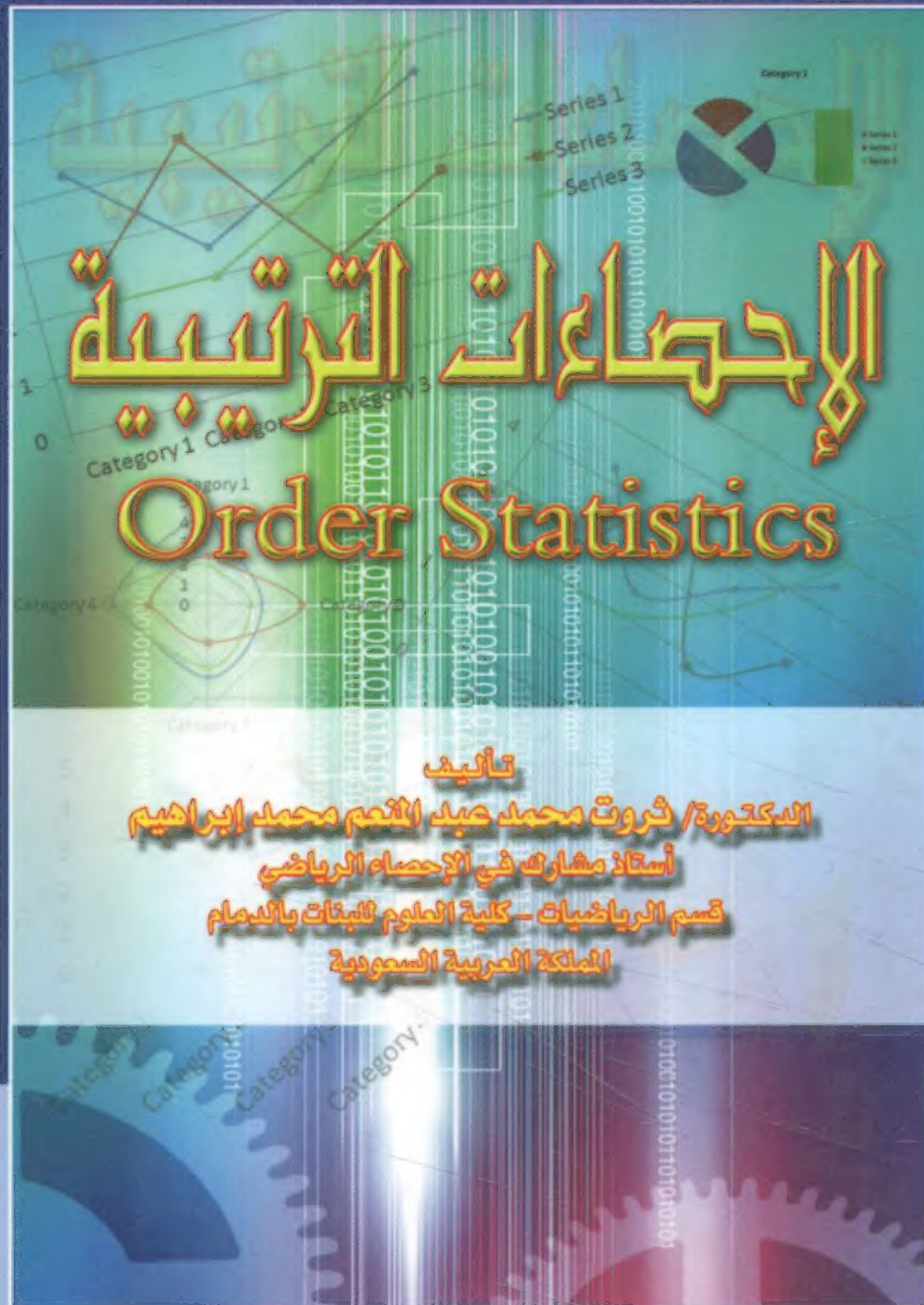
n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	17.97	26.98	32.82	37.08	40.41	43.12	45.40	47.30	49.07	50.59	51.96	53.20	54.33	55.36	56.32	57.22	58.04	58.83	59.56
2	6.08	8.33	9.80	10.88	11.74	12.44	13.03	13.54	13.99	14.39	14.75	15.08	15.38	15.65	15.91	16.14	16.37	16.57	16.77
3	4.50	5.91	6.82	7.50	8.04	8.48	8.85	9.18	9.46	9.72	9.95	10.15	10.35	10.52	10.69	10.84	10.98	11.11	11.24
4	3.93	5.04	5.76	6.29	6.71	7.05	7.35	7.60	7.83	8.03	8.21	8.37	8.52	8.66	8.79	8.91	9.03	9.13	9.23
5	3.64	4.60	5.22	5.67	6.03	6.33	6.58	6.80	6.99	7.17	7.32	7.47	7.60	7.72	7.83	7.93	8.03	8.12	8.21
6	3.45	4.34	4.90	5.30	5.63	5.90	6.12	6.32	6.49	6.65	6.79	6.92	7.03	7.14	7.24	7.34	7.43	7.51	7.59
7	3.34	4.16	4.68	5.06	5.36	5.61	5.82	6.00	6.16	6.30	6.43	6.55	6.66	6.76	6.85	6.94	7.02	7.10	7.17
8	3.26	4.04	4.53	4.89	5.17	5.40	5.60	5.77	5.92	6.05	6.18	6.29	6.39	6.48	6.57	6.65	6.73	6.80	6.87
9	3.20	3.95	4.41	4.76	5.02	5.24	5.43	5.59	5.74	5.87	5.98	6.09	6.19	6.28	6.36	6.44	6.51	6.58	6.64
10	3.15	3.88	4.33	4.65	4.91	5.12	5.30	5.46	5.60	5.72	5.83	5.93	6.03	6.11	6.19	6.27	6.34	6.40	6.47
11	3.11	3.82	4.26	4.57	4.82	5.03	5.20	5.35	5.49	5.61	5.71	5.81	5.90	5.98	6.06	6.13	6.20	6.27	6.33
12	3.08	3.77	4.20	4.51	4.75	4.95	5.12	5.27	5.39	5.51	5.61	5.71	5.80	5.88	5.95	6.02	6.09	6.15	6.21
13	3.06	3.73	4.15	4.45	4.69	4.88	5.05	5.19	5.32	5.43	5.53	5.63	5.71	5.79	5.86	5.93	5.99	6.05	6.11
14	3.03	3.70	4.11	4.41	4.64	4.83	4.99	5.13	5.25	5.36	5.46	5.55	5.64	5.71	5.79	5.85	5.91	5.97	6.03
15	3.01	3.67	4.08	4.37	4.59	4.78	4.94	5.08	5.20	5.31	5.40	5.49	5.57	5.65	5.72	5.78	5.85	5.90	5.96
16	3.00	3.65	4.05	4.33	4.56	4.74	4.90	5.03	5.15	5.26	5.35	5.44	5.52	5.59	5.66	5.73	5.79	5.84	5.90
17	2.98	3.63	4.02	4.30	4.52	4.70	4.86	4.99	5.11	5.21	5.31	5.39	5.47	5.54	5.61	5.67	5.73	5.79	5.84
18	2.97	3.61	4.00	4.28	4.49	4.67	4.82	4.96	5.07	5.17	5.27	5.35	5.43	5.50	5.57	5.63	5.69	5.74	5.79
19	2.96	3.59	3.98	4.25	4.47	4.65	4.79	4.92	5.04	5.14	5.23	5.31	5.39	5.46	5.53	5.59	5.65	5.70	5.75
20	2.95	3.58	3.96	4.23	4.45	4.62	4.77	4.90	5.01	5.11	5.20	5.28	5.36	5.43	5.49	5.55	5.61	5.66	5.71
24	2.92	3.53	3.90	4.17	4.37	4.54	4.68	4.81	4.92	5.01	5.10	5.18	5.25	5.32	5.38	5.44	5.49	5.55	5.59
30	2.89	3.49	3.85	4.10	4.30	4.46	4.60	4.72	4.82	4.92	5.00	5.08	5.15	5.21	5.27	5.33	5.38	5.43	5.47
40	2.86	3.44	3.79	4.04	4.23	4.39	4.52	4.63	4.73	4.82	4.90	4.98	5.04	5.11	5.16	5.22	5.27	5.31	5.36
50	2.83	3.40	3.74	3.98	4.16	4.31	4.44	4.55	4.65	4.73	4.81	4.88	4.94	5.00	5.06	5.11	5.15	5.20	5.24
100	2.80	3.36	3.68	3.92	4.10	4.24	4.36	4.47	4.56	4.64	4.71	4.78	4.84	4.90	4.95	5.00	5.04	5.09	5.13
∞	2.77	3.31	3.63	3.86	4.03	4.17	4.29	4.39	4.47	4.55	4.62	4.68	4.74	4.80	4.85	4.89	4.93	4.97	5.01

ملحق (٤)

جدول القيم الحرجة t_{α} لتوزيع t

v	α						
	.10	.05	.025	.01	.005	.001	.0005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31	636.62
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.326	31.598
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.213	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.767
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

المصدر : عن [Devore (1995)]



مكتبة المتنبي

AL MOTANABI BOOK SHOP

الدمام - شارع المستشفى المركزي هاتف : ٨٤١١٣٩٥ / ٨٤١٣٠٠٠ فاكس : ٨٤٣٢٧٩٤

ص.ب : ٦١٠ الدمام ٣١٤٢١ المملكة العربية السعودية